

FAKULTÄT FÜR PHYSIK UND ASTRONOMIE
RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

DIPLOMARBEIT
IM STUDIENGANG PHYSIK

VORGELEGT VON
HANS LAMECKER
AUS DORTMUND

2000

DIE CHIRALE DYNAMIK DER
STARKEN WECHSELWIRKUNG UND
DAS LINEARE QUARK-MESON-MODELL

DIE DIPLOMARBEIT WURDE VON HANS LAMECKER AUSGEFÜHRT AM
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNTER DER BETREUUNG VON
HERRN PROF. DR. CHRISTOF WETTERICH

ZUSAMMENFASSUNG:

Im Rahmen des Formalismus einer nicht-perturbativen exakten Renormierungsgruppen-gleichung wird das Phänomen der chiralen Symmetriebrechung in der mesonischen Physik untersucht. Als effektive Theorie dient das lineare Quark-Meson Modell, dessen Herleitung skizziert wird. Für zwei Quark Flavor wird eine Trunkierung der $O(4)$ symmetrischen mittleren effektiven Wirkung angegeben, aus der die Flussgleichungen abgeleitet werden. Diese Gleichungen weisen ein partielles Fixpunkt-Verhalten auf, das dem Modell ein hohes Maß an Aussagekraft verleiht. Strategien zur numerischen Lösung der Gleichungen und deren Probleme werden diskutiert. Die Ergebnisse, unter anderem die Vorhersage der Masse der σ -Resonanz, sind eine wichtige Grundlage für die Untersuchung des realistischen Falles dreier Flavor und damit des Phasendiagrammes für die QCD.

CHIRAL DYNAMICS IN STRONG INTERACTION PHYSICS AND THE LINEAR QUARK-MESON MODEL

ABSTRACT:

We examine the phenomenon of chiral symmetry breaking in strong interaction physics at scales where the light mesons form. For this we use the formalism of a non-perturbative exact renormalization group equation. We sketch the derivation of the effective theory for this phenomenon, called the linear-quark-meson model. For two quark flavors we present a truncation of the $O(4)$ -symmetric effective average action, and derive the flow equations from it. They exhibit a partial fixed-point behaviour that leads to great predictive power of the model. Strategies for numerically integrating the flow equations and consecutive problems are discussed. The results include the prediction of the mass of the σ -resonance, which presents a sound foundation for further exploration of the three flavor case and the QCD phase diagram.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Motivation	3
1.2	Überblick	5
2	Die exakte Renormierungsgruppe	9
2.1	Die mittlere effektive Wirkung	9
2.2	Die exakte Renormierungsgruppengleichung	12
2.3	Bemerkungen zur exakten Renormierungsgruppe	14
3	Das lineare Quark–Meson–Modell	17
3.1	Chirale Symmetrie in der QCD	17
3.2	Die effektive Wirkung des Quark Meson Modells	21
3.3	Die Compositeness–Skala	24
4	Chirale Dynamik im Quark–Meson–Modell	27
4.1	Trunkierung der effektiven Wirkung	27
4.2	Flussgleichungen für das $O(4)$ Modell	29
4.3	Qualitative Ergebnisse: das partielle Fixpunkt–Verhalten	32
4.4	Berechnung der Parameter des Modells	38
5	Numerische Analyse des Quark–Meson Modells	41
5.1	Numerische Ansätze und Probleme	41
5.2	Neue Strategien zur Integration der Flussgleichungen	42
5.3	Quantitative Ergebnisse	44
6	Zusammenfassung und Ausblick	51
A	Schwellenfunktionen	53
B	Berechnung der Flussgleichungen	55
C	Konventionen und nützliche Formeln	58
C.1	Fouriertransformation und funktionale Ableitung	58
C.2	d -dimensionale γ -Matrizen	58
C.3	Integrale	59
D	Software–Entwicklung	60

Abbildungsverzeichnis

1	Starke Kopplungskonstante $\alpha_s(q^2)$ in beliebigen Einheiten	3
2	Die spontan gebrochene chirale Symmetrie der QCD	19
3	Die relevanten Skalen der QCD	20
4	Linkes Diagramm: Beitrag des 1–Gluon Austausches im t –Kanal zum 4– Quark Vertex an der Skala $k_p \simeq 1.5 \text{ GeV}$. Rechtes Diagramm: skalarer Meson–Austausch im s –Kanal an der Compositeness–Skala $k_\Phi \simeq 630 \text{ MeV}$.	23
5	Einige Schwellenfunktionen	33
6	Minimum des vollen Fixpunkt–Potentials $u = u_k - j\sqrt{\rho}$ (Ordinate in logarithmischem Maßstab)	35
7	Fixpunkt–Potential	36
8	Wellenfunktionsrenormierung und Yukawa–Kopplung in der Fixpunkt–Nähe– rung	37
9	Yukawakopplung und fermionische Wellenfunktionsrenormierung (volle Flussgleichungen)	46
10	Bosonische Wellenfunktionsrenormierungen	47
11	Volles Potential und die Evolution des Minimums	48
12	Pionzerfallskonstante f_π in MeV als Funktion von \hat{m}_l/\hat{m}_{phys}	50

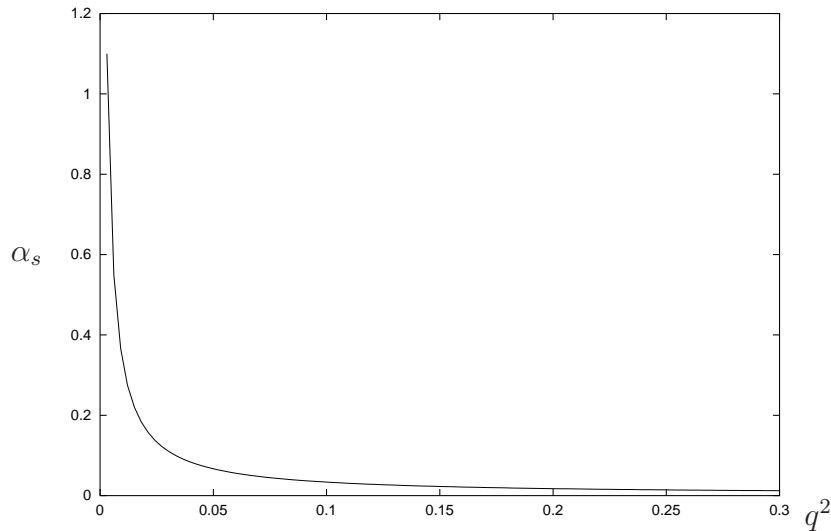


Abbildung 1: Starke Kopplungskonstante $\alpha_s(q^2)$ in beliebigen Einheiten

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist die mikroskopische Theorie der starken Wechselwirkung. Sie beschreibt die Dynamik der Teilchen, aus denen die Hadronen (Proton, Neutron, ...) aufgebaut sind: die Quarks und deren Austauschpartikel, die Gluonen. Die Gültigkeit der QCD konnte bisher in vielen Experimenten eindrucksvoll belegt werden. Zu den wichtigsten Nachweisen gehört die Bestimmung von Wirkungsquerschnitten in Teilchenkollisionen an modernen Beschleunigern. Sie zeigen eine hohe Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment in Energiebereichen zwischen Größenordnungen von etwa 1 bis einigen 100 GeV.

Die QCD hat im Gegensatz zur Quantenelektrodynamik (QED) die Eigenschaft, dass die Kopplung α_s zwischen den Quarks mit abnehmendem Impulsübertrag der Teilchen stark anwächst (dargestellt in Abbildung 1). Während die Kraft zwischen zwei Elektronen mit wachsendem Abstand immer kleiner und schließlich unbedeutend wird, gilt für die Quarks gerade das Gegenteil. Entfernen sich zwei Quarks voneinander, so wächst die Kraft zwischen ihnen bis genug Energie vorhanden ist, neue Teilchen aus dem Vakuum

zu produzieren: in der Natur ist bisher noch kein freies Quark beobachtet worden. Dieses Phänomen ist als *Confinement* bekannt. Dies ist eine Ursache für die Schwierigkeit, niederenergetische Phänomene theoretisch zu beschreiben und aus der fundamentalen Theorie der QCD abzuleiten.

Die beste theoretische Beschreibung der Wechselwirkung zwischen sogenannten elementaren Teilchen ist durch eine nicht-abelsche Eichfeldtheorie gegeben, zusammengefasst im Standardmodell der Teilchenphysik, wovon die QCD einen Teil darstellt. Zur Berechnung von Größen im Standardmodell, also zum Beispiel Wirkungsquerschnitten oder Zerfallsraten, ist man in den meisten Fällen auf Näherungen angewiesen. Das erfolgreichste systematische Verfahren, die Störungstheorie (Perturbations-Theorie), konnte in der QED unter anderem bei der Berechnung des anomalen magnetischen Moments, große Erfolge verbuchen. Das lag daran, dass man die gesuchten Größen in der elektromagnetischen Kopplungskonstante entwickeln konnte. Wegen ihres (kleinen) Wertes ist eine schnelle Konvergenz gesichert. Dieses Verfahren funktioniert auch dann noch sehr gut, wenn man an der Dynamik der starken Wechselwirkung bei hohen Impulsüberträgen interessiert ist, versagt jedoch im Bereich von Energien in der Größenordnung unterhalb von 1 GeV. In diesem sogenannten nicht-perturbativen Regime ist man entweder darauf angewiesen, andere kleine Parameter zu finden, nach denen sich die gewünschten Größen entwickeln lassen, oder neue Verfahren einzusetzen. Die bekannteste Methode ist die Gittertheorie, bei der die Lagrangedichte auf einem Gitter diskretisiert wird und der Gitterabstand am Ende der Berechnung zum Verschwinden gebracht wird. Der Nachteil dieser Methode ist, dass sie einen enormen rechentechnischen Aufwand unter Einsatz leistungsstarker Computer erfordert.

Wir wollen in dieser Arbeit zeigen, wie es möglich ist, theoretische Vorhersagen über den Energiebereich zu machen, an dem sich leichte gebundene hadronische Zustände formen, der also perturbativ nicht zugänglich ist, ohne die volle Theorie der QCD einzubeziehen. Experimentell stellen wir fest, dass die elementaren Freiheitsgrade auf einer Skala von einigen 100 MeV nicht die Quarks und die Gluonen, sondern leichte Hadronen sind. Es liegt daher nahe, eine *effektive* Theorie für diese Freiheitsgrade zu finden und als Grundlage für weitere Untersuchungen zu verwenden. Leider ist es bisher nicht möglich, die Dynamik dieser Freiheitsgrade aus der QCD bei hohen Impulsüberträgen direkt zu berechnen. Doch kann – und wird – die Symmetrie des Teilchenspektrums auf der Skala von einigen 100 MeV als Bauplan einer effektiven Theorie der starken Wechselwirkung dienen, die die

wesentlichen Ingredienzien der vollen Theorie für die Untersuchung der Physik leichter Mesonen beinhaltet. Als Bauplan des sogenannten *linearen Quark–Meson Modells* wird die chirale Symmetrie dienen.

Wichtige Eigenschaften der QCD bei endlicher Temperatur und endlicher Baryonenzahldichte lassen sich mit dem linearen Quark–Meson Modell studieren [1]. Das hängt damit zusammen, dass die chirale Symmetrie bei großen Temperaturen (näherungsweise) wieder restauriert wird. Experimente mit Schwerionenkollisionen sollen in sehr naher Zukunft Daten über Phasenübergänge im Quark–Gluon Plasma liefern. Am 13. Juni 2000 wurden erste (inoffizielle) Erfolgsmeldungen über den Betrieb des Schwerionen Colliders RHIC gemeldet. Daher ist es von großem Interesse, das Phasendiagramm der QCD theoretisch zu kennen, um Vorhersagen über die Existenz und Art von Phasenübergängen zu machen. Diese stellen einen wichtigen Test der QCD dar. Um dieser Herausforderung gewachsen zu sein, ist eine gründliche Untersuchung eines geeigneten Modells bei verschwindender Temperatur von Nöten. Diese Arbeit will einen Beitrag zur Vorbereitung auf diese Aufgabe leisten.

1.2 Überblick

Ein Überblick über die Vorgehensweise dieser Arbeit möge dem Leser die eingehendere Auseinandersetzung mit dem Thema erleichtern.

Wie wir bereits angedeutet haben, sind wir bei der Untersuchung von Phänomenen der starken Wechselwirkung in dem uns interessierenden Energiebereich auf nicht–perturbative Methoden angewiesen. Im ersten Kapitel stellen wir einen quantenfeldtheoretischen Formalismus vor, der für unser Problem geeignet erscheint. Er beruht auf dem Konzept der mittleren effektiven Wirkung, der Erzeugenden der 1PI–Green’s Funktion mit einem geeigneten Cutoff–Term für die Impulse der Felder. Dieses Konzept stellen wir in Abschnitt 2.1 vor. Eine (klassische) Theorie, die an einer Skala Λ durch eine Wirkung Γ_Λ beschrieben ist, lässt sich dann durch Variation des Cutoffs sukzessive nach kleineren Skalen fortsetzen. Man nennt dies das Ausintegrieren von Quantenfluktuationen. Die Gleichung, die die Variation der Wirkung nach dem Cutoff $k = \Lambda e^t$ beschreibt, ist die *exakte Renormierungsgruppengleichung*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_k[\Phi, \Psi, \bar{\Psi}] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \left(\frac{1}{\Gamma_k^{(2)}[\Phi, \Psi, \bar{\Psi}] + \mathcal{R}_k} \right) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{R}_k \right\} \quad (1.1)$$

wobei \mathcal{R}_k der Cutoff-Term ist und $\Gamma_k^{(2)}$ die zweite funktionale Ableitung nach den Feldern darstellt. Die Evolutionsgleichung (1.1) ist ein zentrales Werkzeug der Untersuchung dieser Arbeit. In Abschnitt 2.2 zeigen wir ihre Herleitung für reelle skalare und chirale fermionische Felder. Die Quantenfeldtheorie zu lösen, bedeutet in der Sprache dieses Formalismus, die Evolution der mittleren effektiven Wirkung Γ_k von $k = \Lambda$ nach $k \rightarrow 0$ zu verfolgen. Für die volle Wirkung ist dies im allgemeinen unmöglich, doch erlauben geeignete Ansätze, zum Beispiel Entwicklungen in den Kopplungen der Felder, eine Transformation der funktionalen Gleichung (1.1) in partielle Differentialgleichungen (für die Kopplungen).

Als Bauplan für eine effektive Theorie zur Untersuchung des Energiebereichs von einigen 100 MeV wird die chirale Symmetrie dienen. In Abschnitt 3.1 erläutern wir die Bedeutung der chiralen Symmetrie in der QCD und zeigen, dass deren spontane Brechung das Teilchenspektrum der leichten Hadronen (näherungsweise, denn die Quarks haben nichtverschwindende Massen) erklären kann. Dies ist die Motivation für die Suche nach einer effektiven Theorie für die Dynamik leichter Mesonen. In der Sprache der Renormierungsgruppe wird in Abschnitt 3.2 eine phänomenologische Herleitung des *linearen Quark-Meson Modells* gegeben, die durch numerische Berechnungen gestützt wird. Die zentralen Ideen bei dieser Herleitung sind das Ausintegrieren der gluonischen Freiheitsgrade und die Einführung von zusammengesetzten Feldern. So erhält man eine effektive Wirkung an der sogenannte *Compositeness-Skala*, der Skala, an der sich leichte Mesonen zu formen beginnen. Diese Wirkung wird der Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen.

Eine Analyse des linearen Quark-Meson-Modells für die drei leichten Flavor (up, down, strange) ist sehr aufwendig, da das mittlere effektive Potential, an dem man die Symmetriebrechung ablesen will, eine Funktion vom Cutoff k und vier Symmetrieinvarianten der $SU(3) \times SU(3)$ sein wird. Daher ist es sinnvoll, zunächst den Fall zweier Quark-Flavor zu untersuchen. Eine lokale Isomorphie ist der Grund dafür, dass die Felder dann in einer $O(4)$ symmetrischen Darstellung geschrieben werden können. Das Potential hängt nun mehr nur von einer Invarianten und dem Cutoff ab. Für den Fall von drei Flavor wurde gezeigt, dass sich das volle Potential in Funktionen von eben genanntem Typ trunkieren lässt. Das ist eine weitere Motivation für eine genaue Untersuchung des Falles zweier Flavor. In Abschnitt 4.1 geben wir eine gegenüber bisherigen Arbeiten verbesserte Trunkierung der mittleren effektiven Wirkung an. Aus dieser werden in Abschnitt 4.2 schließlich die Flussgleichungen abgeleitet. Dies sind die Gleichungen, die die Evolution

von $k = \Lambda$ nach $k \rightarrow 0$ beschreiben. In Abschnitt 4.3 diskutieren wir die Lösung dieser Gleichungen qualitativ. Dabei findet man ein partielles Fixpunkt–Verhalten, das dem Modell ein hohes Maß an Aussagekraft verleiht. Das lässt hoffen, dass sich dieses Verhalten auf den Fall dreier Flavor übertragen wird. Da eine strenge Herleitung des Modells aus der QCD nicht möglich ist, muss man die relevanten Parameter des Modells aus phänomenologischen Größen bestimmen. Hiermit beschäftigen wir uns im letzten Abschnitt des Kapitels.

Zentral für die quantitative Untersuchung des linearen Quark–Meson Modells ist die Gleichung für das mittlere effektive Potential U_k . Diese ist im Falle zweier Flavor eine nichtlineare partielle Differentialgleichung in zwei unabhängigen Variablen. Wie bereits erwähnt, werden im Falle dreier Flavor solche Gleichungen auch im Mittelpunkt der methodischen Untersuchung stehen. Daher ist es unerlässlich, Verfahren zur Lösung dieses Typs von Gleichung zu entwickeln. Aufgrund starker Instabilitäten erweist sich diese Aufgabe als nicht–trivial. Weitere Probleme hierzu werden in Abschnitt 5.1 diskutiert. Eine neue Strategie, die auch im Falle dreier Flavor erfolgversprechend erscheint, und laufende Arbeiten werden in Abschnitt 5.2 erörtert.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass die numerischen Untersuchungen für eine große Anzahl von Anwendungen des Formalismus der exakten Renormierungsgruppe von Wichtigkeit sind: Helium–3 und 4, Hubbard Modell und vieles mehr. Aus diesem Grund geht diese Arbeit besonders auf eine Weiterentwicklung numerischer Methoden ein.

Abschließend werden einige quantitative Ergebnisse der numerischen Analyse in Abschnitt 5.3 präsentiert und diskutiert. Ein wichtiger Prüfstein für das Modell und weitere Untersuchungen wie die QCD–Phasen ist die Masse des σ –Teilchens, für die wir einen Wert von 400 bis 600 MeV finden. Dies ist unter anderem direkt mit experimentellen Daten vergleichbar: neue Experimente zur genaueren Bestimmung wurden vorgeschlagen [2]. Nach Einbeziehung des strange Quark in die Analyse sind auch theoretisch genauere Werte zu erwarten.

Eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf eine mögliche Fortsetzung beschließen die Arbeit.

2 Die exakte Renormierungsgruppe

Zur Untersuchung der niederenergetischen Phänomene in der QCD benötigen wir einen nicht-perturbativen Ansatz, der es erlaubt, von der Skala des störungstheoretisch zugänglichen Regimes zu dem Bereich zu gelangen, bei dem sich Mesonen formen. An dieser Skala ist eine perturbative Beschreibung wegen der großen auftretenden Kopplungen offensichtlich nicht mehr zulässig.

In diesem Kapitel erläutern wir das Konzept der effektiven mittleren Wirkung Γ_k [3, 4, 5] und deren Skalenabhängigkeit, die durch eine exakte Renormierungsgruppengleichung [6] beschrieben wird. Die bloße Existenz dieser exakten Gleichung ist aufgrund ihrer mathematischen Kompliziertheit noch keine Hilfe. Die Struktur der Gleichung und ihre Ähnlichkeit zu störungstheoretischen Ansätzen erlaubt es aber, geeignete Trunkierungen der mittleren effektiven Wirkung zu finden, die zu approximativen Lösungen führen.

Wir zeigen die Konstruktion einer mittleren effektiven Wirkung für skalare und fermionische Felder. Das Kapitel endet mit einigen wichtigen Bemerkungen zur Struktur der exakten Renormierungsgruppe.

2.1 Die mittlere effektive Wirkung

Unser Ziel ist es, eine skalenabhängige Wirkung zu definieren, die zwischen der klassischen (mikroskopischen) Wirkung und einer effektiven (makroskopischen) Wirkung, aus welcher alle Quantenfluktuationen ausintegriert sind, zu interpolieren:

$$\Gamma_\Lambda \approx S, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k = \Gamma. \quad (2.1)$$

Die volle Lösung der Quantenfeldtheorie entspricht der Fähigkeit, den Fluss $k \rightarrow 0$ zu verfolgen. Alternativ kann man auch ein Modell Γ_Λ an einer Ultraviolett-Skala Λ mit der mikroskopischen Wirkung S identifizieren. In diesem Fall sind effektiv keine Impulse unterhalb von Λ in dem Modell berücksichtigt, solange $k = \Lambda$. Dieser Denkweise werden wir bei der Herleitung des linearen Quark-Meson-Modells des öfteren begegnen.

Als erstes addieren wir zur klassischen Wirkung einen Infrarot-Cutoff Term für reelle skalare Felder und chirale Fermionen hinzu. Mit diesen Feldern werden wir im linearen Quark-Meson-Modell arbeiten.

$$S_k[\phi, \psi, \bar{\psi}] = S[\phi, \psi, \bar{\psi}] + \Delta_k S[\phi] + \Delta_k S_F[\psi, \bar{\psi}]. \quad (2.2)$$

Wir formulieren die Cutoff–Terme geeigneterweise im Impulsraum. Der **bosonische Cutoff–Term** hat die Form eines Massentermes in der Wirkung, wobei $R_{k,B}(q^2)$ für $q^2 \gg k^2$ verschwinden und für $q^2 \ll k^2$ proportional k sein soll. Das bedeutet, dass alle Fourierkomponenten der Felder mit Impulsen, die größer als die Infrarot Skala k sind, eine effektive Masse $\sim k$ erhalten und schließlich entkoppeln. Hingegen sind die hohen Impulsmoden nicht von $R_{k,B}$ betroffen. Damit nimmt der bosonische Term folgende Form an:

$$\Delta_k S[\phi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} R_{k,B}(q^2) \phi_a(-q) \phi^a(q) \quad (2.3)$$

Es gibt viele Möglichkeiten $R_{k,B}$ zu wählen [7]. In dieser Arbeit verwenden wir die für numerische Untersuchungen nützliche Form

$$R_{k,B}(q^2) = \frac{Z_{\Phi,k} q^2 e^{-q^2/k^2}}{1 - e^{-q^2/k^2}}. \quad (2.4)$$

Um die Invarianz physikalischer Größen unter Skalierung der Felder zu gewährleisten, muss in diesem Ausdruck die Wellenfunktionsrenormierung $Z_{\Phi,k}$ eingeführt werden. Diese Notwendigkeit wird bei der späteren Untersuchung der Flussgleichung, also der Skalenabhängigkeit der mittleren effektiven Wirkung, noch klarer.

Die Wahl der **fermionischen Cutoff–Funktion** [8, 9] lässt sich bis auf einige Unterschiede analog zum bosonischen Fall durchführen. Chirale Fermionen lassen keinen Massenterm zu. Um die chirale Symmetrie zu erhalten, muss die Cutoff–Funktion die selbe Lorentzstruktur wie ein fermionischer kinetischer Term besitzen, d.h. $\sim \gamma^\mu q_\mu$ sein. Ausserdem sollte sie für $q^2 \rightarrow 0$ proportional zum Cutoff k sein, damit die Beiträge für $q^2 \ll k^2$ entkoppeln. Das Ergebnis nach [8, 9] ist

$$\Delta_k S_F[\psi, \bar{\psi}] = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \bar{\psi}(q) Z_{\psi,k} \not{q} r_F \left(\frac{q^2}{k^2} \right) \psi(q). \quad (2.5)$$

mit $R_{k,F} = Z_{\psi,k} \not{q} r_F$. In praktischen Rechnungen tritt häufig die Kombination

$$P_F \equiv q^2 (1 + r_F)^2 \quad (2.6)$$

auf. P_F ist bis auf die fermionische Wellenfunktionsrenormierung gerade der quadratische inverse Propagator für ein freies masseloses Fermion in Anwesenheit eines Infrarot–Cutoffs. In dieser Arbeit wählen wir für P_F die für numerische Untersuchungen günstige Form:

$$P_F = \frac{q^2}{1 - \exp\left\{-\frac{q^2}{k^2}\right\}}. \quad (2.7)$$

Die Einführung dieser Cutoff-Terme entspricht der Regularisierung der Theorie.

Von der klassischen Wirkung gehen wir zum erzeugenden Funktional der zusammenhängenden GREEN Funktionen über. In der Sprache der statistischen Physik ist das der Logarithmus der großkanonischen Zustandsumme in Anwesenheit äusserer Felder J , K und \overline{K} :

$$\begin{aligned} W_k[J, K, \overline{K}] &= \ln Z[J, K, \overline{K}] \\ &= \ln \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\overline{\psi} \exp \left\{ - S_k[\phi, \psi, \overline{\psi}] \right. \\ &\quad \left. + \int d^d x \left[J_a(x) \phi^a(x) + \overline{K}_j(x) \psi^j(x) - \overline{\psi}_j(x) K^j(x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei a bzw. j hier die internen bosonischen bzw. fermionischen Freiheitsgrade (wie Flavor, Color, etc.) nummeriert. Alle Spinorindizes wurden hier unterdrückt.

Mit der effektiven mittleren Wirkung bezeichnen wir in dieser Arbeit die Legendre-transformierte von $W_k[J, K, \overline{K}]$ abzüglich der Abschneideterme, also das erzeugende Funktional für die 1PI-GREEN Funktionen:

$$\begin{aligned} \Gamma_k[\Phi, \Psi, \overline{\Psi}] &= -W_k[J, K, \overline{K}] + \int d^d x \left[J_a(x) \Phi^a(x) + \overline{K}(x) \Psi(x) - \overline{\Psi}(x) K(x) \right] \\ &\quad - \Delta_k S[\Phi] - \Delta_k S_F[\Psi, \overline{\Psi}] \end{aligned} \quad (2.9)$$

wobei die sogenannten klassischen Felder Φ etc. gegeben sind durch die Erwartungswerte der mikroskopischen Felder ϕ etc. in Anwesenheit der äusseren Felder und der Cutoff-Terme:

$$\begin{aligned} \Phi^a(q) &\equiv \frac{\delta W_k[J]}{\delta J_a(-q)} = \langle \phi^a(q) \rangle \\ \Psi(q) &\equiv \frac{\delta W_k[J, K, \overline{K}]}{\delta \overline{K}(q)} = \langle \psi(q) \rangle \\ \overline{\Psi}(q) &\equiv \frac{\delta W_k[J, K, \overline{K}]}{\delta K(q)} = \langle \overline{\psi}(q) \rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Zu den Konventionen zur Fouriertransformation und den funktionalen Methoden siehe Anhang C. Für unsere Wahl der Cutoff Funktionen sind in der Tat obige Ansprüche an die mittlere effektive Wirkung gewährleistet:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} R_k(q^2) = 0 &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k = \Gamma \\ \lim_{k \rightarrow \infty} R_k(q^2) = \infty &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k = S \end{aligned} \quad (2.11)$$

Für die Zwecke dieser Arbeit können wir auf weitere Details zu diesem Thema verzichten. Einzelheiten zum Konzept der mittleren effektiven Wirkung entnehme der Leser den umfassenden Arbeiten [7] oder [1].

2.2 Die exakte Renormierungsgruppengleichung

Wir wollen nun die Herleitung der exakten Renormierungsgruppengleichung für reelle skalare Felder und chirale Fermionen skizzieren. Das bedeutet, dass wir die k Abhängigkeit der effektiven mittleren Wirkung berechnen wollen. Statt k führen wir die nützliche Größe $t = \ln(k/\Lambda)$ ein, wobei Λ die im letzten Kapitel eingeführte Ultraviolett-Skala ist. Zur Vereinfachung der Darstellung wollen wir dazu nur je ein skalares und ein fermionisches Feld betrachten (Dies bedeutet lediglich, dass die internen Indizes unterdrückt werden):

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k |_{\Phi, \Psi, \bar{\Psi}} &= -\partial_t W_k |_{J, K, \bar{K}} + \int d^d x \left[(\partial_t J) \Phi + (\partial_t \bar{K}) \Psi - (\partial_t \bar{\Psi}) K \right] \\ &\quad - \partial_t \Delta_k S[\Phi] - \partial_t \Delta_k S_F[\Psi, \bar{\Psi}] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die ∂_t -Ableitung wirkt nur auf den am nächsten rechts stehenden Term unter dem Integral. Die Quellen hängen über

$$\begin{aligned} J(q) &\equiv \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k[\Phi, \Psi, \bar{\Psi}]}{\delta \Phi(-q)} \\ K(q) &\equiv -\frac{\delta \tilde{\Gamma}_k[\Phi, \Psi, \bar{\Psi}]}{\delta \bar{\Psi}(q)} \\ \bar{K}(q) &\equiv -\frac{\delta \tilde{\Gamma}_k[\Phi, \Psi, \bar{\Psi}]}{\delta \Psi(q)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

von k ab. Dabei gilt

$$\tilde{\Gamma}_k[\Phi, \Psi, \bar{\Psi}] = \Gamma_k[\Phi, \Psi, \bar{\Psi}] - \Delta_k S[\Phi] - \Delta_k S_F[\Psi, \bar{\Psi}] \quad (2.14)$$

Werten wir diese Abhängigkeit in (2.12) weiter aus, so erhalten wir

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{\delta^2 W_k}{\delta J(-q) \delta J(q)} \partial_t R_{k,B} \right\} + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{\delta^2 W_k}{\delta K(q)^\alpha \delta \bar{K}(q)_\beta} (\partial_t R_{k,F})^\alpha_\beta \right\} \quad (2.15)$$

wobei wir zur Verdeutlichung die Spinorindizes wieder angebracht haben. Die Cutoff-Funktionen sind im vorangegangenen Kapitel definiert. Im nächsten Schritt versuchen wir einen Zusammenhang zwischen W_k und $\tilde{\Gamma}_k$ herzustellen. Dazu berechnen wir

$$\frac{\delta \Phi(q)}{\delta \Phi(q'')}, \frac{\delta \Psi(q)}{\delta \Psi(q'')}, \frac{\delta \bar{\Psi}(q)}{\delta \bar{\Psi}(q'')}, \frac{\delta \Phi(q)}{\delta \bar{\Psi}(q'')}, \dots \quad (2.16)$$

wobei wir wieder die implizite Abhängigkeit der Felder nach den Quellen zu berücksichtigen haben. Wir erhalten schließlich folgende Struktur:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \begin{pmatrix} W_{k,BB}^{(2)} & -W_{k,BF}^{(2)} & -W_{k,B\bar{F}}^{(2)} \\ W_{k,FB}^{(2)} & -W_{FF}^{(2)} & -W_{k,F\bar{F}}^{(2)} \\ W_{k,\bar{F}B}^{(2)} & -W_{k,\bar{F}F}^{(2)} & -W_{k,\bar{F}\bar{F}}^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_{k,BB}^{(2)} & \tilde{\Gamma}_{k,B\bar{F}}^{(2)} & \tilde{\Gamma}_{k,BF}^{(2)} \\ \tilde{\Gamma}_{k,\bar{F}B}^{(2)} & \tilde{\Gamma}_{k,\bar{F}F}^{(2)} & \tilde{\Gamma}_{k,\bar{F}\bar{F}}^{(2)} \\ \tilde{\Gamma}_{k,FB}^{(2)} & \tilde{\Gamma}_{k,FF}^{(2)} & \tilde{\Gamma}_{k,FF}^{(2)} \end{pmatrix} = \delta(q - q'') \quad (2.17)$$

Der Index B steht für eine funktionale Ableitung nach dem skalaren Feld Φ und entsprechend F bzw. \bar{F} für eine Ableitung nach dem fermionischen bzw. antifermionischen Feld Ψ bzw. $\bar{\Psi}$. Zum Beispiel gilt:

$$\begin{aligned} [\Gamma_{k,BB}^{(2)}(q, q')] &= \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta\Phi(-q)\delta\Phi(q')} \\ [\Gamma_{k,B\bar{F}}^{(2)}(q, q')]^\alpha &= \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta\Phi(-q)\delta\bar{\Psi}_\alpha(q')} \\ [\Gamma_{k,F\bar{F}}^{(2)}(q, q')]^\beta_\alpha &= \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta\Psi^\alpha(-q)\delta\bar{\Psi}_\beta(q')} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Wir nennen die Matrix mit den Einträgen $\tilde{\Gamma}$ einfach $\tilde{\Gamma}_k^{(2)}$. Dieses Objekt ist im allgemeinen eine Matrix im Impuls-, Flavor-, Color-, Spinor- und dem hier eingeführten Boson-Fermion-Antifermion Raum. Wir erhalten

$$\begin{aligned} W_{k,BB}^{(2)} &= \left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}\right)_{BB}^{-1} \\ W_{k,F\bar{F}}^{(2)} &= -\left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)}\right)_{\bar{F}F}^{-1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Setzen wir das nun in Gleichung (2.15) ein und schreiben

$$\tilde{\Gamma}_k^{(2)} = \Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k \quad (2.20)$$

wobei

$$\mathcal{R}_k = \begin{pmatrix} R_{k,B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{k,F} \\ 0 & R_{k,F} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

so erhalten wir als gewünschtes Ergebnis die exakte Renormierungsgruppengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\Phi, \Psi, \bar{\Psi}] &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \left(\frac{1}{\Gamma_k^{(2)}[\Phi, \Psi, \bar{\Psi}] + \mathcal{R}_k} \right)_{BB} \partial_t R_{k,B} \right\} \\ &- \text{Tr} \left\{ \left(\frac{1}{\Gamma_k^{(2)}[\Phi, \Psi, \bar{\Psi}] + \mathcal{R}_k} \right)_{\bar{F}F} \partial_t R_{k,F} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \left(\frac{1}{\Gamma_k^{(2)}[\Phi, \Psi, \bar{\Psi}] + \mathcal{R}_k} \right) \partial_t \mathcal{R}_k \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

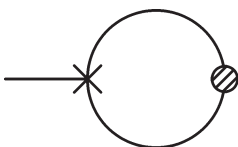
Die Spur in dieser Gleichung steht symbolisch für die Summation über alle internen Freiheitsgrade: Impulse, Spinor-, Flavor-, etc. Indizes:

$$\text{Tr} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \sum_{\text{Indizes}} .$$

Diese Gleichung stellt das zentrale Werkzeug für die folgenden physikalischen Untersuchungen dar. Bevor wir diese aber im nächsten Abschnitt beginnen, wollen wir einige allgemeine Bemerkungen zu dieser Gleichung und ihrer Anwendbarkeit machen.

2.3 Bemerkungen zur exakten Renormierungsgruppe

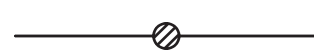
Wie in der Einleitung dieses Abschnittes bereits angedeutet ist die Tatsache, dass die Gleichung (2.22) exakt ist, an dieser Stelle noch ohne großen Gewinn. Sie stellt eine funktionale Differentialgleichung dar, über deren allgemeine Lösbarkeit wenig bekannt ist, über deren Struktur hingegen schon. Gleichung (2.22) lässt sich in Form einer 1-Loop Gleichung darstellen:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \times \text{Diagram} \quad (2.23)$$


wobei

$$\times \quad = \quad \partial_t \mathcal{R}_k$$

und der k -abhängige volle Propagator gegeben ist durch

$$\text{Diagram} = (\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k)^{-1} .$$


Der Übergang vom klassischen Propagator in Anwesenheit des Infrarot Cutoff-Terms $(S^{(2)} + \mathcal{R}_k)^{-1}$ zum vollen Propagator stellt also den Übergang von einer 1-Loop Näherung zum vollen Problem dar! Auf der rechten Seite von (2.22) sind beliebig hohe Loop-Ordnungen beinhaltet. Es scheint also aussichtslos, das Problem in dieser Formulierung zu lösen.

Dies ist aber doch möglich, wenn man geeignete Ansätze für die effektive mittlere Wirkung finden kann. Entwickelt man die Wirkung zum Beispiel nach den Symmetrie-Invarianten eines bestimmten Modells (wie wir das später tun werden), so erhält man unendlich viele gekoppelte partielle Differentialgleichungen in den Entwicklungskoeffizienten. Lässt sich diese Entwicklung in einer geeigneten Form trunkieren, so dass einerseits die relevante Dynamik berücksichtigt wird und andererseits der (numerische) Aufwand nicht zu groß wird, ist man einer Lösung bereits etwas näher gekommen. Eine mögliche Trunkierung für ein $O(4)$ -symmetrisches Modell mit der Invarianten $\rho = \text{tr } \Phi^\dagger \Phi$ sieht zum Beispiel folgendermaßen aus:

$$\Gamma_k[\Phi] = \int d^d x \left\{ U_k(\rho) + \frac{1}{2} Z_k(\rho) \partial_\mu \Phi^a \partial^\mu \Phi_a + \frac{1}{4} Y_k(\rho) \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \mathcal{O}(\partial^4) \right\}. \quad (2.24)$$

Es soll hier wiederholt werden, dass dies ein nicht-perturbativer Zugang ist, denn die Entwicklungskoeffizienten (zum Beispiel des Potentials, also die Kopplungen) müssen in keiner Weise klein sein. In dieser Hinsicht ist die Existenz der Gleichung (2.22) von ausserordentlicher Nützlichkeit.

Es ist allerdings schwierig, eine Aussage über die Zuverlässigkeit dieser oder einer anderen Entwicklung zu machen. Durch die Mitnahme höherer Ordnungen lässt sich jedoch die Konvergenz überprüfen. Wir werden in dieser Arbeit eine Trunkierung ähnlich (2.24) verwenden, die gegenüber früheren Arbeiten weitere Terme in der Entwicklung berücksichtigt. Wir werden finden, dass sich die Ergebnisse nicht sehr stark verändern, so dass wir darauf vertrauen, eine gute Trunkierung gewählt zu haben. Die Trunkierung ergibt sich in natürlicher Weise aus phänomenologischen Überlegungen und stellt daher einen logischen Ausgangspunkt für die Untersuchung des Gegenstandes dieser Arbeit dar.

Die im nächsten Abschnitt näher dargelegten Überlegungen lassen es plausibel erscheinen, den Zugang über die exakte Renormierungsgruppe bei der Untersuchung der mesonischen Physik einzusetzen. Für eine ausführlichere Diskussion der exakten Renormierungsgruppengleichung und ihrer Eigenschaften sei auf [7] verwiesen.

3 Das lineare Quark–Meson–Modell

In diesem Abschnitt verfolgen wir den Weg vom störungstheoretischen Regime der QCD zu der Skala, bei der sich experimentell beobachtbar die Mesonen bilden [10]. Das daraus resultierende effektive Modell wird das lineare Quark–Meson–Modell (lineares σ -Modell) genannt. Es beinhaltet als Freiheitsgrade die leichten Quarks (fermionische Felder) und zusammengesetzte fermionische Felder (Mesonen), die sich als Matrixfeld schreiben lassen.

Zunächst erläutern wir das Konzept der chiralen Symmetrie, die wir als Bauplan für die effektive Theorie zugrundelegen. Wir geben eine qualitative Herleitung einer für die Untersuchung der chiralen Symmetriebrechung geeigneten Wirkung an, die stark auf den Ideen der exakten Renormierungsgruppengleichung beruht. Es muss betont werden, dass diese Herleitung nicht streng, sondern phänomenologisch motiviert, ist. Die Überlegungen liefern schließlich die Anfangsbedingungen für das lineare Quark–Meson–Modell. Dies wird der Ausgangspunkt für die Untersuchungen der folgenden Kapitel sein.

3.1 Chirale Symmetrie in der QCD

Die mikroskopische Theorie der starken Wechselwirkung beschreibt die Dynamik der Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen. Mathematisch wird sie durch eine nicht-abelsche Eichtheorie mit folgender Lagrangedichte beschrieben:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QCD}} &= -\frac{1}{2} \text{tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \\ &+ \sum_{a=1}^{N_f} \sum_{i,j=1}^3 \bar{\psi}_{a,i} \left(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu^{ij} - m_a \right) \psi_{a,j} \\ G_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu] \\ A_\mu &\equiv \sum_{\alpha=1}^8 A_\mu^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2} \\ \mathcal{D}_\mu^{ij} \psi_a &\equiv \left[\partial_\mu \delta^{ij} - ig A_\mu^{ij} \right] \psi_a\end{aligned}$$

wobei A die Gluonenfelder und ψ die Quarkfelder sind, die durch die starke Kopplung g wechselwirken. G ist der Feldstärketensor und \mathcal{D} die kovariante Ableitung. Weiterhin gilt:

- $a = 1, \dots, N_f \rightarrow$ Quark-flavor Index
- $i, j = 1, 2, 3 \rightarrow$ Farbindices zur $\mathbf{3}$ -Darstellung der $SU(3)$
- $\lambda^\alpha \rightarrow$ Gell-Mann Matrizen (Generatoren der $SU(3)$), $\alpha = 1, \dots, 8$
- $\gamma^\mu (\mu = 0, \dots, 3) \rightarrow$ Dirac'sche Gamma-Matrizen (alle Spinorindices sind unterdrückt)

Diese Feldtheorie ist hochgradig nicht-trivial. Bei hohen Impulsüberträgen lässt sich die Störungstheorie mit guter Genauigkeit anwenden, jedoch versagt sie bei kleinen Energien wegen des Phänomens des Confinements. Wir untersuchen daher eine (approximative) Symmetrie der QCD-Lagrangedichte, um daraus ein effektives Modell zu gewinnen, das auch bei kleinen Energien Berechnungen erlaubt.

Dazu zerlegen wir das Quarkfeld in einen links- und rechtshändigen Teil:

$$\psi = \psi_L + \psi_R \quad (3.1)$$

wobei

$$\begin{aligned} \psi_L &= \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \equiv \mathcal{P}_L \psi \\ \psi_R &= \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi \equiv \mathcal{P}_R \psi \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{L/R}$ sind Projektionsoperatoren. An der Lagrangedichte (hier der Übersichtlichkeit halber nur für ein Flavor)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= -\frac{1}{2} \text{tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_R \\ &\quad - \bar{\psi}_L M_\psi \psi_R - \bar{\psi}_R M_\psi \psi_L \end{aligned}$$

erkennt man, dass nur die Massenterme die rechts- und linkshändigen Felder koppeln. Im Falle masseloser Quarks ist \mathcal{L}_{QCD} daher invariant unter der sogenannten *chiralen* Symmetriegruppe $U_L(N_f) \times U_R(N_f)$ mit der Transformation:

$$\begin{aligned} \psi_R &\longrightarrow \mathcal{U}_R \psi_R ; \quad \mathcal{U}_R \in U_R(N_f) \\ \psi_L &\longrightarrow \mathcal{U}_L \psi_L ; \quad \mathcal{U}_L \in U_L(N_f) . \end{aligned} \quad (3.2)$$

In der vollen Theorie der QCD ist diese Symmetrie natürlich nicht exakt, weil Quarks eine Masse besitzen. Für die leichten Quarks (up, down, strange) sollte diese Symmetrie aber näherungsweise realisiert sein, was im Hadronenspektrum erkennbar sein wird (siehe unten).

Wie aus dem Experiment ersichtlich, lassen sich die leichten Hadronen aber Multipletts bezüglich der Gruppe $SU_V(N_f)$ zuordnen. Diese Tatsache lässt sich durch die Annahme spontaner Symmetriebrechung erklären. Wir haben dies in Abbildung 2 schematisch dargestellt: Die Untergruppe $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$ wird spontan zu $SU_V(N_f)$ gebrochen. Die $U_A(1)$ wird durch eine Anomalie gebrochen, wie sich zeigen lässt. Das wird uns aber in dieser Arbeit nicht interessieren.

Nach dem Theorem von GOLDSTONE sollte es in einer Theorie mit spontan gebrochener

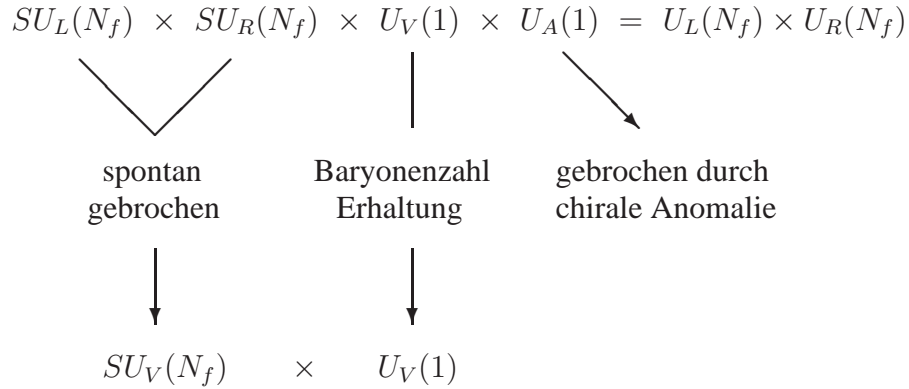


Abbildung 2: Die spontan gebrochene chirale Symmetrie der QCD

Symmetrie $SU_A(N_f)$ genau $N_f^2 - 1$ masselose pseudoskalare Bosonen geben. Wegen der expliziten Symmetriebrechung durch die Quarkmassen sollten daher im Hadronenspektrum $N_f^2 - 1$ annähernd masselose pseudoskalare Mesonen zu finden sein. Im Falle von zwei und drei Flavor beobachtet man:

- $N_f = 2$: Die drei Pionen, π^\pm und π^0 transformieren als Triplet unter der $SU_V(2)$ und haben annähernd die gleiche Masse $m_\pi \simeq 135$ MeV
- $N_f = 3$: Zu den Pionen kommen die vier Kaonen, K^\pm , K^0 und \bar{K}^0 , mit $M_K \simeq 495$ MeV und das η -Meson mit $m_\eta \simeq 550$ MeV, die ein Oktett bezüglich der $SU_V(3)$ bilden.

Diese Hadronen sind wesentlich leichter als der Rest des Spektrums und vor allem sind sie leichter als ihre skalaren Partner, so dass sie zweifelsohne als Goldstone-Bosonen identifiziert werden können.

Der Vollständigkeit halber wollen wir das gesamte Mesonenspektrum für zwei und drei Flavor angeben, denn alle Teilchen werden im Quark-Meson-Modell auftauchen:

$$\begin{array}{ll}
 N_f = 2 & : \text{ Pseudoskalare } \pi^\pm, \pi^0, \eta' \\
 & \quad \text{Skalare } a_0^\pm, a_0^0, \sigma \\
 N_f = 3 & : \text{ Pseudoskalare } \pi^\pm, \pi^0, \eta', K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta \\
 & \quad \text{Skalare } a_0^\pm, a_0^0, \sigma, K_0^{*\pm}, K_0^{*0}, \bar{K}_0^{*0}, f_0
 \end{array}$$

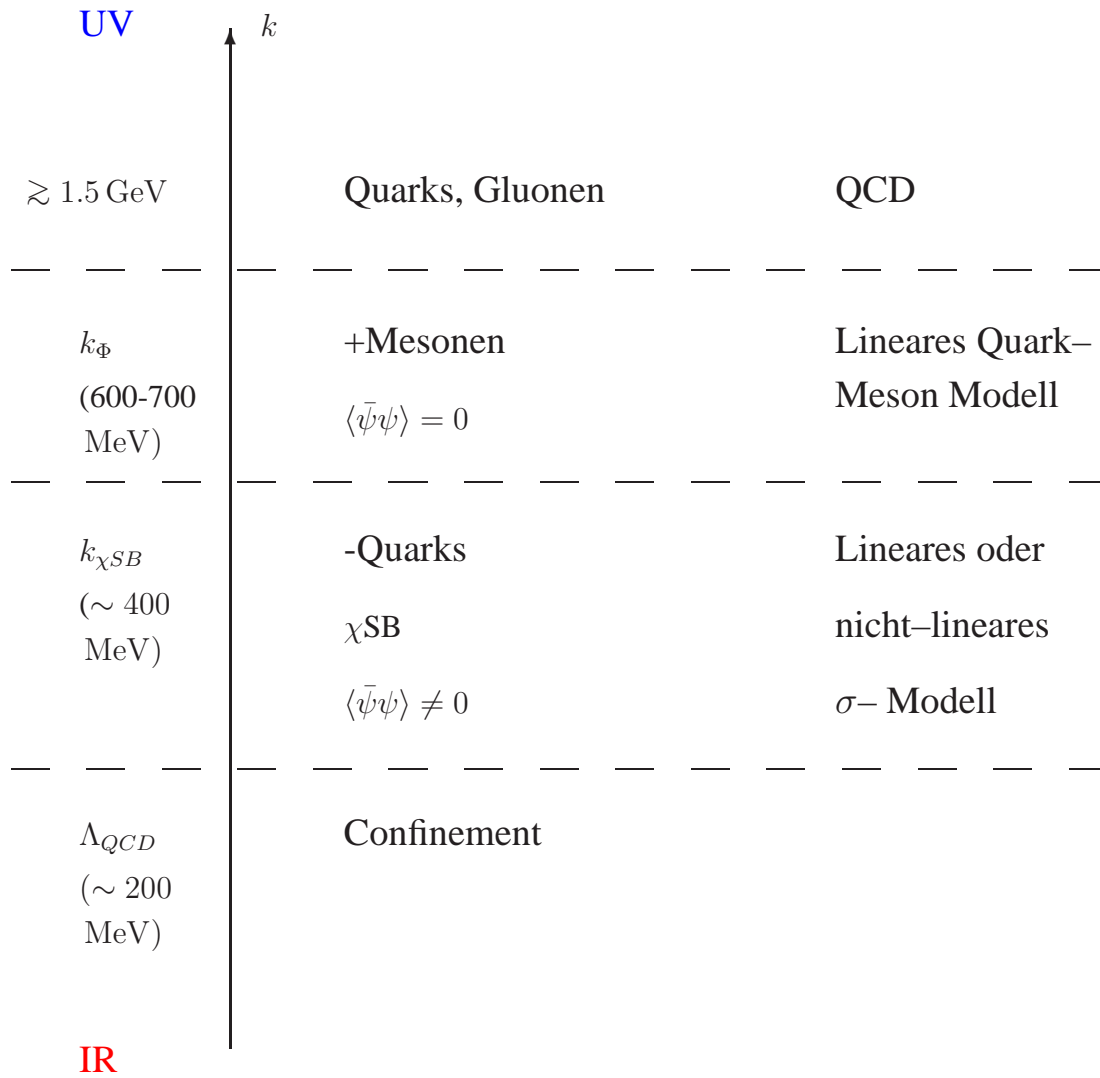


Abbildung 3: Die relevanten Skalen der QCD

3.2 Die effektive Wirkung des Quark Meson Modells

Da wir eine effektive Theorie anstreben, die es uns erlaubt, die Physik im Impulsbereich einiger 100 MeV zu untersuchen, benötigen wir ein Verfahren, um von der berechenbaren perturbativen QCD zu einer Skala zu extrapolieren, bei der sich Mesonen bilden.

Im perturbativ zugänglichen Regime der QCD, also auf einer Skala $k > 1,5 \text{ GeV}$, sind die relevanten Freiheitsgrade die Quarks und Gluonen. Auf einer Skala unterhalb von 1 GeV beginnen sich die Mesonen zu formen und die Wechselwirkung zwischen Quarks und Mesonen (YUKAWA–Kopplung) dominiert die starke Wechselwirkung. Unterhalb der Skala $k_{\chi_{SB}}$, bei der die spontane Symmetriebrechung stattfindet, nimmt allerdings die starke Kopplung zu, so dass man die gluonischen Einflüsse bei Annäherung an Λ_{QCD} , der Skala, an der Confinement einsetzt, nicht mehr vernachlässigen kann.

Wegen ihrer großen Konstituentenmasse von $\simeq 300 \text{ MeV}$ entkoppeln die Quarks aber bei $k \simeq 300 \text{ MeV}$ von der Evolution der mesonischen Freiheitsgrade. Da wir uns vor allem für die Dynamik der Mesonen interessieren, werden die Einflüsse der starken Wechselwirkung keine allzu große Rolle spielen. Dies wird bei Betrachtung der Flussgleichungen im nächsten Kapitel deutlicher. Für eine Untersuchung des Confinement ist dieser Standpunkt jedoch ungeeignet. Wir haben deshalb gute Gründe anzunehmen, dass eine effektive Theorie, welche Quarks und Mesonen als Freiheitsgrade beinhaltet, zumindest die mesonische Physik gut beschreibt. Diese Annahme wird im nächsten Kapitel quantitativ verifiziert.

Zunächst wollen wir aber den Weg vom perturbativen Bereich der QCD zu einem effektiven Quark–Meson–Modell beschreiben. Eine detaillierte Beschreibung findet der Leser in [10]. Wir wollen hier nur die wesentlichen Schritte kurz erläutern. Die relevanten Skalen der QCD sind in Abbildung 3 zur Verdeutlichung dargestellt.

Mit $\Gamma_k^{(\text{QCD})}[A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi]$ bezeichnen wir die klassische Wirkung der QCD bei der Skala $k_p = 1.5 \text{ GeV}$, die sich störungstheoretisch zumindest im Prinzip berechnen lässt. In einem ersten Schritt werden nun die Gluonen mit Hilfe einer exakten Renormierungsgruppengleichung aus einer störungstheoretisch berechneten Wirkung komplett ausintegriert. Dazu verringert man den IR-Cutoff R_k für die Gluonen nach Null, während der Cutoff für die Quarks festgehalten wird. Sukzessive werden dann die Gluonen durch Lösen der Feldgleichung für die Gluonfelder als Funktionale der Quarkfelder eliminiert. Dies resultiert in einer nichttrivialen Impulsabhängigkeit des Quarkpropagators und in nichtlokalen vier- und mehr Quark–Wechselwirkungen.

Man behält in einer zweiten Näherung nur die 4–Quarkwechselwirkungen an der Ska-

la k_p bei. Die so erhaltene Wirkung $\Gamma_{k_p}^{(\text{QCD})}[\bar{\Psi}, \Psi]$ dient als Anfangswert für eine weitere Renormierungsgruppenrechnung, um in einem zweiten Schritt von k_p zur sogenannten Compositeness–Skala k_Φ zu gelangen. Damit bezeichnen wir die Impulsskala, bei der sich bereits mesonische Zustände gebildet haben. Es wurde eine Trunkierung verwendet, die die allgemeinste Impulsabhängigkeit erhält:

$$\begin{aligned} \Gamma_k[\Psi, \bar{\Psi}] &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}_a^i(p) Z_{\Psi,k}(p) \left[\not{p} \delta^{ab} + m^{ab}(p) \gamma_5 + i \tilde{m}^{ab}(p) \right] \Psi_{ib}(p) \\ &+ \frac{1}{2} \int \left(\prod_{l=1}^4 \frac{d^4 p_l}{(2\pi)^4} \right) (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ &\times \lambda_k^{(\Psi)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \left\{ \left[\bar{\Psi}_a^i(-p_1) \Psi_i^b(p_2) \right] \left[\bar{\Psi}_b^j(p_4) \Psi_j^a(-p_3) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\bar{\Psi}_a^i(-p_1) \gamma_5 \Psi_i^b(p_2) \right] \left[\bar{\Psi}_b^j(p_4) \gamma_5 \Psi_j^a(-p_3) \right] \right\}. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Als Anfangsbedingung für $\lambda_k^{(\Psi)}$ wählt man den Austausch eines farbgeladenen Gluons im t -Kanal. Bei der Renormierungsgruppenanalyse von $\lambda_k^{(\Psi)}$ zeigt sich an der Compositenessskala $k_\Phi \simeq 630 \text{ MeV}$ eine Impulsabhängigkeit, die den Austausch von farblosen mesonischen Zuständen darstellt (Bethe–Salpeter Faktorisierung):

$$\lambda_{k_\Phi}^{(\Psi)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = g(p_1, p_2) \tilde{G}(s) g(p_3, p_4) + \dots \quad (3.4)$$

Dieser Sachverhalt wird schematisch durch einen Feynmangraphen in Abbildung 4 veranschaulicht. Die obigen Überlegungen führen nun zum dritten und letzten Schritt, nämlich der Einführung von zusammengesetzten Mesonenfeldern an der Compositeness–Skala, was einer Art Variablentransformation entspricht. Diese Ersetzung sollte es einfacher machen, geeignete Trunkierungen für die von uns angestrebte Untersuchung mesonischer Physik zu finden. Wir geben hier nur das Ergebnis einer längeren Rechnung [11, 12, 13] an und erläutern seine Konsequenzen:

$$\hat{\Gamma}_k = \Gamma_k - \frac{1}{2} \int d^4 x \text{tr} \left(\Phi^\dagger j + j^\dagger \Phi \right) \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \int d^4 x U_k(\Phi, \Phi^\dagger) \\ &+ \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^d} \left\{ Z_{\Phi,k}(q) q^2 \text{tr} \left[\Phi^\dagger(q) \Phi(q) \right] + Z_{\Psi,k}(q) \bar{\Psi}_a(q) \gamma^\mu q_\mu \Psi^a(q) \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^d} \bar{h}_k(-q, q-p) \bar{\Psi}^a(q) \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \Phi_{ab}(p) - \frac{1-\gamma_5}{2} \Phi_{ab}^\dagger(-p) \right) \Psi^b(q-p) \right\}. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Die leichten pseudoskalaren und skalaren Mesonen werden durch farb– neutrale Quark–Antiquark Zustände $\Phi^{ab} \sim \bar{\Psi}_L^b \Psi_R^a$, $a, b = 1, \dots, N_f$ dargestellt. Sie transformieren gemäß

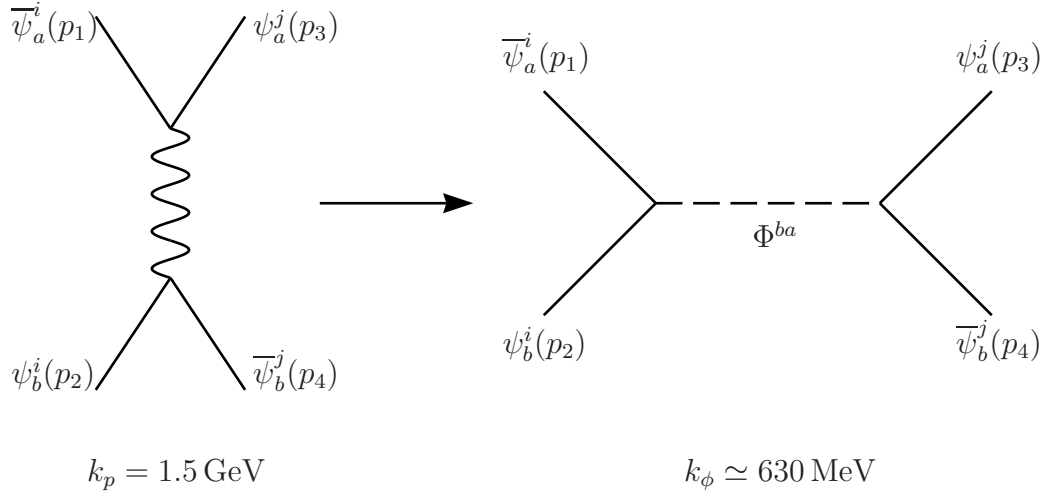


Abbildung 4: Linkes Diagramm: Beitrag des 1–Gluon Austausches im t –Kanal zum 4–Quark Vertex an der Skala $k_p \simeq 1.5 \text{ GeV}$. Rechtes Diagramm: skalarer Meson–Austausch im s –Kanal an der Compositeness–Skala $k_\phi \simeq 630 \text{ MeV}$.

der (\bar{N}_f, N_f) Darstellung der chiralen Gruppe $U_L(N_f) \times U_R(N_f)$:

$$\Phi \longrightarrow \mathcal{U}_R \Phi \mathcal{U}_L^\dagger . \quad (3.7)$$

Für $N_f = 2$ bzw. $N_f = 3$ beinhaltet das Mesonfeld gerade die am Ende des letzten Kapitels angegebenen Mesonen.

Der inverse skalare Propagator an der Skala k_ϕ hängt mit $\tilde{G}(q)$ in (3.4) folgendermaßen zusammen:

$$\tilde{G}^{-1}(q^2) = 2\bar{m}_{k_\phi}^2 + 2Z_{\Phi, k_\phi}(q)q^2 . \quad (3.8)$$

Dieses Ergebnis führt auf das effektive Mesonpotential bei k_ϕ :

$$U_{k_\phi} = \bar{m}_{k_\phi}^2 \text{tr} \Phi^\dagger \Phi + \dots \quad (3.9)$$

wobei die Punkte durch die in (3.3) gemachte Näherung nicht spezifiziert werden können, weil dazu höhere Ordnungen berücksichtigt werden müssten. Die nackte Masse wurde bestimmt zu

$$\bar{m}_{k_\phi} \simeq 120 \text{ MeV} . \quad (3.10)$$

Den Wert für die Yukawa–Kopplung an der Compositeness–Skala erhält man aus

$$\bar{h}_{k_\phi}(-q, q-p) = g(-q, q-p) \quad (3.11)$$

was folgendermaßen normiert werden kann: $\bar{h}_{k_\Phi}(0,0) = g(0,0) = 1$.

Die chirale Symmetriebrechung wird erreicht, wenn das Mesonpotential einen endlichen Vakuum–Erwartungswert entwickelt:

$$\langle \Phi^{ab} \rangle = \bar{\sigma}_0 \delta^{ab} ; \quad \bar{\sigma}_0 \neq 0 . \quad (3.12)$$

Neben dieser spontanen Symmetriebrechung finden wir aber auch die explizite Symmetriebrechung durch die Quarkmassen im linearen Quellterm wieder. Die Quelle j berechnet sich aus der ursprünglichen Wirkung (3.3) zu:

$$j = \frac{Z_{\Psi,k_\Phi}(0)}{g(0,0)\tilde{G}(0)} (m_{ab} + i\tilde{m}_{ab}) = 2Z_{\Psi,k_\Phi} \bar{m}_{k_\Phi}^2 \text{diag}(m_u, m_d, m_s) . \quad (3.13)$$

Eine Herleitung dieser Relation findet man in [1].

3.3 Die Compositeness–Skala

In diesem Abschnitt wollen wir wiederholen, welche Form die effektive chirale Wirkung an der Compositeness–Skala hat und wie die Anfangsbedingungen an dieser Skala für den weiteren Fluss aussehen.

Dabei werden wir eine weitere Vereinfachung in Kauf nehmen, und zwar werden wir die Impulsabhängigkeit der Wellenfunktionsrenormierungen sowie der Yukawakopplung vernachlässigen. Es zeigt sich, dass diese Näherung bereits realistische Ergebnisse bringt. Somit haben wir für $k < k_\Phi$ folgende mittlere effektive Wirkung:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_k &= \Gamma_k - \frac{1}{2} \int d^4x \text{tr} (\Phi^\dagger j + j^\dagger \Phi) \\ \Gamma_k &= \int d^4x \left\{ Z_{\Psi,k} \bar{\Psi}_a i \not{\partial} \Psi^a + Z_{\Phi,k} \text{tr} [\partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi] + U_k(\Phi, \Phi^\dagger) \right. \\ &\quad \left. + \bar{h}_k \bar{\Psi}^a \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \Phi_{ab} - \frac{1 - \gamma_5}{2} (\Phi^\dagger)_{ab} \right) \Psi^b \right\} . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Hätten wir die Impulsabhängigkeit der vier-Quark Wechselwirkung bereits in (3.3) vernachlässigt, so ergäbe sich $Z_{\Phi,k_\Phi} = 0$. Wir lassen aber an der Compositeness–Skala ein durchaus nicht–verschwindendes, wenn auch kleines Z_{Φ,k_Φ} zu. Ausserdem verlangen wir, dass im effektiven Potential (3.9) keine weiteren Terme auftreten, die die Symmetrie brechen könnten. Desweiteren haben wir die Normierungsbedingungen $\bar{h}_{k_\Phi} = Z_{\Psi,k_\Phi} = 1$. Damit, sowie durch die Festlegung der Quarkmassen sind alle Parameter an der Compositeness–Skala k_Φ festgelegt und wir können mit der Untersuchung der chiralen Symmetriebrechung beginnen.

Was erhoffen wir uns von solch einer effektiven Theorie? Zum einen sollte sie spontane Symmetriebrechung vorhersagen. Dies wird daran erkennbar sein, dass \overline{m}_k^2 negativ wird oder allgemeiner, das Minimum des Potentials U_k sich von Null wegbewegen sollte.

In das Modell ging als wesentlicher Bestandteil die chirale Symmetrie ein. Nach Fixierung der Parameter $\overline{m}_{k\Phi}^2$, k_Φ und den Quarkmassen durch zum Beispiel die Pionzerfallskonstante $f_\pi = 92.4 \text{ MeV}$, die Pionmasse $m_\pi = 135 \text{ MeV}$ und der Konstituentenquarkmasse $M_q \simeq 330 \text{ MeV}$ sollten daher keine Aussagen über die Symmetrierelationen zu erwarten sein.

Wir hoffen aber, dass den Flussgleichungen zumindest ein partielles Fixpunktverhalten unterhalb der Compositeness–Skala zugrundeliegt, d.h. dass das Modell für $k \rightarrow 0$ nur schwach oder gar nicht von einigen der Anfangsbedingungen abhängt. In der Tat lässt sich dies numerisch sowie analytisch (vgl. Kapitel 4.3) erkennen. Dieser Tatsache ist es zu verdanken, dass verlässliche Aussagen über die Symmetrierelationen hinaus zu machen sind.

4 Chirale Dynamik im Quark–Meson–Modell

In diesem Kapitel wollen wir das lineare Quark Meson Modell für zwei Flavor untersuchen. Zunächst geben wir eine gegenüber bisherigen Arbeiten [14] verbesserte Trunkierung der effektiven Wirkung an. Dann wird die Herleitung der Flussgleichungen beschrieben. Diese Gleichungen weisen ein partielles Fixpunktverhalten auf, das für die Vorhersagekraft des Modells ausserordentlich wichtig ist. Die qualitative Lösung der Gleichungen, bei denen die sogenannten Schwellenfunktionen eine wichtige Rolle spielen, wird diskutiert.

4.1 Trunkierung der effektiven Wirkung

Für den Fall von zwei Flavor (u und d) können wir das Quark–Meson–Modell (3.14) weiter vereinfachen. Da die Massen des η' sowie des skalaren Isotriplets a_0 relativ groß gegenüber der Masse der Pionen und der σ Resonanz sind, können wir sie effektiv von der Dynamik des Systems entkoppelt betrachten. Für den Fall zweier Quarks ist das möglich, ohne die chirale Symmetrie zu verletzen, denn die chirale Gruppe $SU_L(2) \times SU_R(2)$ ist lokal isomorph zur $O(4)$. Wir können also die Darstellung der $SU_L(2) \times SU_R(2)$ in zwei (vektorielle) Darstellungen der $O(4)$ zerlegen:

$$\Phi = \frac{1}{2}(\sigma - i\eta') + \frac{1}{2}(a^k + i\pi^k)\tau_k \quad (4.1)$$

Die Matrizen τ_k , $k = 1, 2, 3$ sind die üblichen Paulimatrizen. Die Felder des η' und a_0 Isotriplets können aufgrund ihrer großen Massen vernachlässigt werden, so dass nun nur noch vier Freiheitsgrade, nämlich das σ und die π Felder, übrigbleiben. Ab jetzt bezeichnen wir das $O(4)$ –symmetrische Feld $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = (\sigma, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Das effektive mittlere Potential wird in dieser Näherung eine Funktion von nur einer Invarianten $\rho = \text{tr } \Phi^\dagger \Phi = \frac{1}{2}(\sigma^2 + \pi^i \pi_i)$.

Wir wollen nun eine allgemeinere Trunkierung der effektiven Wirkung (3.14) zulassen, indem wir einen weiteren Term in der Ableitungsentwicklung nach den Invarianten mitnehmen:

$$\Gamma_k = \int d^d x \left\{ U_k(\rho) + \frac{1}{2} Z_\Phi(k) \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi_i + \frac{1}{4} Y_\Phi(k) \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho \right. \\ \left. + Z_\psi(k) \bar{\psi}_a i \not{\partial} \psi^a + \frac{1}{2} \bar{h}(k) \bar{\psi}^a \left(\bar{\gamma} \phi_1 \delta_{ab} + i \sum_{j=2}^4 \phi^j \tau_j \right) \psi^b \right\} \quad (4.2)$$

Diese Form der Wirkung können wir noch einmal umschreiben, wenn wir nur Fluktuationen linear in den Feldern untersuchen: $\phi = \phi_0 + \chi$, wobei $\phi_0 = \text{const.}$ und χ klein sein

soll. Entwickeln wir die Ableitung nach Termen linear in χ um die konstante Hintergrundfeldkonfiguration $(\sigma, \pi^i) = (2\bar{\sigma}_0, 0)$, so entstehen zwei unterschiedliche Wellenfunktionsrenormierungen. Der Vakuumerwartungswert des Feldes $\bar{\sigma}_0 = \langle \Phi \rangle$ (vgl. Kapitel 3.2) gibt an, wann die spontane Symmetriebrechung einsetzt.

$$\begin{aligned} Z_\pi(k) &= Z_\Phi(k) \\ Z_\sigma(k) &= Z_\Phi(k) + 2\bar{\sigma}_0^2 Y_\Phi(k) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Man sieht, dass sich die beiden Wellenfunktionsrenormierungen erst in der gebrochenen Phase voneinander unterscheiden werden. Der numerische Unterschied zwischen diesen beiden Größen, genauer gesagt ihr Quotient, wird uns in dieser Arbeit interessieren.

Mit Hilfe von (4.3) schreiben wir die Trunkierung in der Form, mit der wir im folgenden Verlauf arbeiten werden (wobei wir die Felder nun wieder mit ϕ bezeichnen):

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \int d^d x \left\{ U_k(\rho) + \frac{1}{2} Z_\sigma(k) \partial_\mu \phi^1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} Z_\pi(k) \sum_{i=2}^4 \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi_i \right. \\ &\quad \left. + Z_\psi(k) \bar{\psi}_a i \not{\partial} \psi^a + \frac{1}{2} \bar{h}(k) \bar{\psi}^a \left(\bar{\gamma} \phi_1 \delta_{ab} + i \sum_{j=2}^4 \phi^j \tau_j \right) \psi^b \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nach diesen Vorüberlegungen können wir die formalen Definitionen für das Potential $U_k(\rho)$, die radiale- und die Goldstone-Wellenfunktionsrenormierung, $Z_\sigma(k)$ und $Z_\pi(k)$, sowie die fermionische Wellenfunktionsrenormierung $Z_\psi(k)$ und die Yukawakopplung $\bar{h}(k)$ angeben, aus denen wir im nächsten Kapitel die Flussgleichungen extrahieren wollen:

$$\begin{aligned} U_k(\rho) &:= \frac{1}{\Omega} \Gamma_k \Big|_{vac} \quad (\text{mit } \Omega = \int d^d x) \\ Z_\sigma(k) &:= \lim_{Q^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial Q^2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_1(-Q) \delta \phi^1(p)} \Big|_{vac} \\ Z_\pi(k) &:= \frac{1}{3} \lim_{Q^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial Q^2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \sum_{i=2}^4 \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_i(-Q) \delta \phi^i(p)} \Big|_{vac} \\ &= \lim_{Q^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial Q^2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_2(-Q) \delta \phi^2(p)} \Big|_{vac} \\ Z_\psi(k) &:= \frac{2^{-d/2-1}}{N_c} \lim_{Q^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial Q^2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \text{tr} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \psi_a(p) \delta \bar{\psi}^a(Q)} \Big|_{vac} \not{p} \right) \\ \bar{h}(k) &:= \frac{2^{-d/2}}{N_c} \lim_{Q, Q' \rightarrow 0} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \text{tr} \left(\frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta \phi_0(p) \delta \psi_a(Q) \delta \bar{\psi}^a(Q')} \Big|_{vac} \bar{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Abkürzung vac bedeutet die Feldkonfiguration, an der obige Ausdrücke ausgewertet werden:

$$(\phi_1, \dots, \phi_4) = (\sigma, \pi^i) = (2\bar{\sigma}_0, 0) \quad (4.6)$$

Das Minimum des Potentials liegt bei

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \phi^i \phi_i \Big|_{vac} = 2\bar{\sigma}_0^2 \quad (4.7)$$

4.2 Flussgleichungen für das $O(4)$ Modell

Wir werden nun die Flussgleichungen für die Größen (4.5) berechnen. Dazu bilden wir die t -Ableitung auf beiden Seiten von (4.5). Sie vertauscht mit den Integralen und den funktionalen Ableitungen und wirkt schließlich direkt auf Γ_k . Die Abhängigkeit der effektiven mittleren Wirkung Γ_k von der Skala k wird durch die exakte Renormierungsgruppengleichung (2.22) gegeben. Details der länglichen Rechnung sind im Anhang B zu finden.

Anstelle der Wellenfunktionsrenormierungen werden wir hier mit den anomalen Dimensionen und dem Quotient der Wellenfunktionsrenormierungen arbeiten, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \eta_\psi &:= -\frac{d}{dt} \ln Z_\psi \\ \eta_\sigma &:= -\frac{d}{dt} \ln Z_\sigma \\ \eta_\pi &:= -\frac{d}{dt} \ln Z_\pi \\ \delta &:= \frac{Z_\sigma}{Z_\pi} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Das Ergebnis stellt ein System von gekoppelten partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen dar, das numerisch integriert werden muss. Damit werden wir uns im nächsten Kapitel eingehend beschäftigen. Um die physikalische Diskussion transparenter zu gestalten, gehen wir im Folgenden zu dimensionslosen und renormierten Feldern und Potentialen über.

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= Z_\pi k^{2-d} \rho \\ u_k(\tilde{\rho}) &= k^{-d} U_k(\rho) \\ h^2 &= Z_\pi^{-1} Z_\psi^{-2} k^{d-4} \bar{h}^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Wir erhalten folgende Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \delta = \delta(\eta_\pi - \eta_\sigma) \quad (4.10)$$

Für das **mittlere effektive Potential** erhalten wir eine partielle Differentialgleichung in k oder $t = \ln(k/k_\Phi)$ und $\tilde{\rho}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_k &= -du_k + (d-2 + \eta_\pi) \tilde{\rho} u'_k \\ &+ 2v_d \left\{ 3 \mathbf{I}_0^d(u'_k; 1; \eta_\pi) + \mathbf{I}_0^d(u'_k + 2\tilde{\rho} u''_k; \delta; \eta_\pi) - 2^{\frac{d}{2}+1} N_c \mathbf{I}_0^{(\mathbf{F})d} \left(\frac{1}{2} \tilde{\rho} h^2; \eta_\psi \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Diese Gleichung stellt das Herzstück der folgenden Untersuchungen dar. Um sie zu lösen, brauchen wir noch die anomalen Dimensionen und die Yukawakopplung, für die wir im Folgenden die Gleichungen angeben werden. Weiterhin gilt die wichtige Abkürzung

$$v_d^{-1} \equiv 2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2). \quad (4.12)$$

In (4.11) sowie den folgenden Gleichungen tauchen die in Anhang A definierten dimensionslosen Schwellenfunktionen l_n^d und $l_n^{(\mathbf{F})d}$ auf. Die Argumente dieser Funktionen sind dimensionslose renormierte Massen. Die Schwellenfunktionen sorgen dafür, dass große Massen effektiv von der Dynamik des Systems entkoppeln. Ihre Bedeutung werden wir im nächsten Abschnitt näher beleuchten, wenn wir die Flussgleichungen lösen.

Die **anomalen Dimensionen** werden am Minimum des Potentials ausgewertet, d.h. das Potential und seine Ableitungen sind bei $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0$: $u_k^{(i)} \equiv u_k^{(i)}(\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0)$ angegeben. Der Deutlichkeit halber definieren wir: $\kappa = \tilde{\rho}_0$, $\varepsilon_g = u'_k(\kappa)$, $\lambda = u''_k(\kappa)$ und $\lambda' = u'''_k(\kappa)$. Mit diesen Definitionen erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \eta_\pi &= \frac{4v_d}{d} \left\{ 4\kappa\lambda^2 \mathbf{m}_{2,2}^d(\varepsilon_g, \varepsilon_g + 2\kappa\lambda; 1, \delta; \eta_\pi) \right. \\ &+ \left. 2^{\frac{d}{2}} N_c h^2 \mathbf{m}_4^{(\mathbf{F})d} \left(\frac{1}{2} \kappa h^2; \eta_\psi \right) + 2^{\frac{d}{2}-1} N_c h^4 \kappa \mathbf{m}_2^{(\mathbf{F})d} \left(\frac{1}{2} \kappa h^2; \eta_\psi \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \eta_\sigma &= \frac{4v_d}{d} \left\{ 4\kappa\lambda^2 \mathbf{m}_{4,0}^d(\varepsilon_g, 0; 1, 1; \eta_\pi) \right. \\ &+ 4\kappa (3\lambda + 2\kappa\lambda')^2 \mathbf{m}_{0,4}^d(0, \varepsilon_g + 2\kappa\lambda; 1, \delta; \eta_\pi) \\ &+ \left. 2^{\frac{d}{2}} N_c h^2 \delta^{-1} \mathbf{m}_4^{(\mathbf{F})d} \left(\frac{1}{2} \kappa h^2; \eta_\psi \right) - 2^{\frac{d}{2}-1} N_c h^4 \kappa \delta^{-1} \mathbf{m}_2^{(\mathbf{F})d} \left(\frac{1}{2} \kappa h^2; \eta_\psi \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\eta_\psi = \frac{2v_d}{d} h^2 \left\{ 3 \mathbf{m}_{1,2}^{(\mathbf{FB})d} \left(\frac{1}{2} \kappa h^2, \varepsilon_g; 1; \eta_\psi, \eta_\pi \right) + \mathbf{m}_{1,2}^{(\mathbf{FB})d} \left(\frac{1}{2} \kappa h^2, \varepsilon_g + 2\kappa\lambda; \delta; \eta_\psi, \eta_\pi \right) \right\} \quad (4.15)$$

Schreiben wir diese drei Größen in der Form

$$\eta_\pi = A_1 - A_2\eta_\pi - A_3\eta_\psi \quad (4.16)$$

$$\eta_\psi = A_4 - A_5\eta_\pi - A_6\eta_\psi \quad (4.17)$$

so erhalten wir nach Auflösen des Gleichungssystems:

$$\eta_\pi = \frac{A_1(1 + A_6) - A_3A_4}{(1 + A_2)(1 + A_6) - A_3A_5} \quad (4.18)$$

$$\eta_\psi = \frac{A_1(1 + A_2) - A_1A_5}{(1 + A_2)(1 + A_6) - A_3A_5} \quad (4.19)$$

Als letztes brauchen wir noch die **Yukawa-Kopplung**:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h^2 &= (d - 4 + 2\eta_\psi + \eta_\pi) h^2 \\ &- 2v_d h^4 \left\{ 3 \mathbf{1}_{1,1}^{(\text{FB})\text{d}} \left(\frac{1}{2} \kappa h^2, \varepsilon_g; 1; \eta_\psi, \eta_\pi \right) - \mathbf{1}_{1,1}^{(\text{FB})\text{d}} \left(\frac{1}{2} \kappa h^2, \varepsilon_g + 2\kappa\lambda; \delta; \eta_\psi, \eta_\pi \right) \right\} \\ &+ 4v_d h^4 \kappa \left\{ 3\lambda \mathbf{1}_{1,2}^{(\text{FB})\text{d}} \left(\frac{1}{2} \kappa h^2, \varepsilon_g; 1; \eta_\psi, \eta_\pi \right) \right. \\ &- \left. (3\lambda + 2\kappa\lambda') \mathbf{1}_{1,2}^{(\text{FB})\text{d}} \left(\frac{1}{2} \kappa h^2, \varepsilon_g + 2\kappa\lambda; \delta; \eta_\psi, \eta_\pi \right) \right\} \\ &+ 2v_d h^6 \kappa \left\{ 3 \mathbf{1}_{2,1}^{(\text{FB})\text{d}} \left(\frac{1}{2} \kappa h^2, \varepsilon_g; 1; \eta_\psi, \eta_\pi \right) - \mathbf{1}_{2,1}^{(\text{FB})\text{d}} \left(\frac{1}{2} \kappa h^2, \varepsilon_g + 2\kappa\lambda; \delta; \eta_\psi, \eta_\pi \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Da wir an der Lage vom Minimum des Potentials interessiert sind, geben wir für diese Größe eine eigene Gleichung an. Das volle Potential beinhaltet die explizite Symmetriebrechung, die von der Quelle in der effektiven mittleren Wirkung, also den Quarkmassen, herrührt: $U = U_k - j\langle\Phi\rangle$, wobei j k -unabhängig ist. Aus der Bedingung $\frac{\partial U}{\partial \rho}(\rho_0) = 0$ erhalten wir die Flussgleichung für das **Minimum** κ (dimensionslos und renormiert):

$$\frac{d}{dt}\kappa = \frac{\kappa}{\varepsilon_g + 2\kappa\lambda} \left\{ [\eta_\pi - d - 2] \varepsilon_g - 2 \frac{\partial}{\partial t} u'_k(\kappa) \right\} \quad (4.21)$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u'_k &= (\eta_\pi - 2) \tilde{\rho} u'_k + (d - 2 + \eta_\pi) \tilde{\rho} u''_k - 2v_d \left\{ 3u''_k \mathbf{1}_1^{\text{d}}(u'_k; 1; \eta_\pi) \right. \\ &+ \left. (3u''_k + 2\kappa u'''_k) \mathbf{1}_1^{\text{d}}(u'_k + 2\tilde{\rho} u''_k; \delta; \eta_\pi) - 2^{\frac{d}{2}} N_c h^2 \mathbf{1}_1^{(\text{F})\text{d}} \left(\frac{1}{2} \tilde{\rho} h^2; \eta_\psi \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die Flussgleichung für κ lautet also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\kappa &= -(d-2+\eta_\pi)\kappa + \frac{4v_d\kappa}{\varepsilon_g + 2\kappa\lambda} \left\{ 3\lambda \mathbf{I}_1^d(\varepsilon_g; 1; \eta_\pi) \right. \\ &\quad \left. + (3\lambda + 2\kappa\lambda')\mathbf{I}_1^d(\varepsilon_g + 2\kappa\lambda; \delta; \eta_\pi) - 2^{\frac{d}{2}}N_c h^2 \mathbf{I}_1^{(\mathbf{F})d}\left(\frac{1}{2}\kappa h^2; \eta_\psi\right) \right\} \quad (4.23) \end{aligned}$$

Alle hier auftauchenden Schwellenfunktionen sind im Anhang A definiert. Dieses System von Gleichungen, das auf den ersten Blick hoffnungslos kompliziert erscheint, gilt es nun zu verstehen und zu lösen.

4.3 Qualitative Ergebnisse: das partielle Fixpunkt–Verhalten

Ein wichtiger Bestandteil der Flussgleichungen (4.11) bis (4.23) sind die Schwellenfunktionen, die im Anhang A explizit aufgeführt sind. Ihre genaue Form hängt von der Wahl der Cutoff–Funktion R_k ab. Die Argumente der Schwellenfunktionen sind die dimensionslosen, renormierten bosonischen

$$\begin{aligned} u'_k &= U'_k/(Z_\pi k^2) \\ u'_k + 2\tilde{\rho}u''_k &= (U'_k + 2\rho U''_k)/(Z_\pi k^2) \end{aligned}$$

und die fermionische Teilchenmasse:

$$\frac{1}{2}\tilde{\rho}h^2 = \frac{1}{2}\rho\bar{h}^2/(Z_\psi^2 k^2)$$

Für große Werte fallen alle Schwellenfunktionen rasch ab und nähern sich dem Wert Null. Damit wird das Entkoppeln der Moden mit Impulsen größer als k^2 beschrieben, was die Flussgleichungen nun viel anschaulicher macht. In Abbildung 5.1 und 5.2 sind einige Schwellenfunktionen exemplarisch dargestellt. An der Gleichung des Potentials (4.11) erkennen wir jetzt, dass aufgrund der kleinen Wellenfunktionsrenormierung Z_π an der Startskala k_Φ die bosonischen Massen sehr groß werden und die Evolution von u_k vom fermionischen Beitrag bestimmt werden. Das negative Vorzeichen vor der fermionischen Schwellenfunktion bewirkt, dass das Potential vor allem am Ursprung sehr schnell nach unten gezogen wird, bis es ein Minimum ungleich Null entwickelt (zur Erinnerung: wir starten mit einem symmetrischen Potential $u = m^2\tilde{\rho} + \dots$). Die Symmetrie wird gebrochen. Zu diesem Zeitpunkt werden allerdings die bosonischen Massen klein werden, denn k wird kleiner und die Steigung des Potentials um den Ursprung geht gegen Null. Gleichzeitig können wir an der Gleichung für die Yukawa-Kopplung ablesen, dass deren Wert rasch kleiner werden wird. Wenn das Modell also eine gute Beschreibung ist, sollten sich

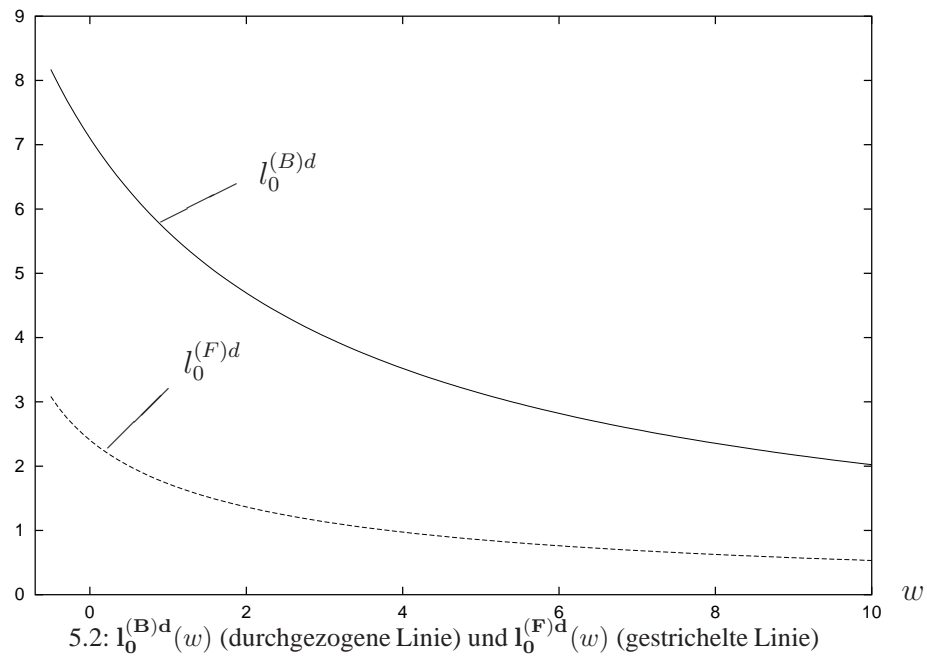
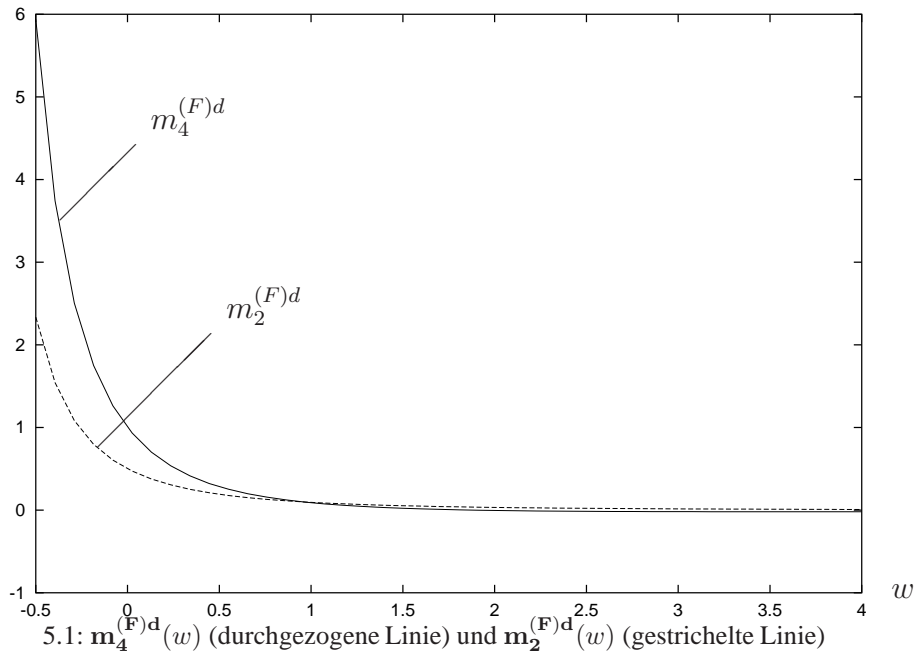


Abbildung 5: Einige Schwellenfunktionen

die bosonischen und fermionischen Beiträge kompensieren und das Potential sollte sich nicht mehr weiter entwickeln.

Das eben beschriebene Verhalten lässt sich quantifizieren, wenn wir in den Flussgleichungen alle bosonischen und gemischt fermionisch–bosonischen Terme vernachlässigen. Wir betrachten ausserdem ein quellenfreies System, also kein explizites Laufen des Minimums. An der Skala k_Φ und unterhalb, aber vor der Symmetriebrechung, ist dies aufgrund der Anfangsbedingung $Z_\Phi \ll 1$ und der physikalischen Vorstellung vom Verhalten des Systems gerechtfertigt. Diese Näherung ist solange gut, wie die bosonischen Massen groß sind. Die Flussgleichungen nehmen folgende Form an:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u &= -du + (d-2 + \eta_\pi) \tilde{\rho} u' - 2^{d/2+2} N_c v_d l_0^{(F)d} \left(\frac{1}{2} \tilde{\rho} h^2 \right), \\
\frac{d}{dt} h^2 &= \eta_\pi h^2, \\
\eta_\pi &= 2^{d/2+2} N_c \frac{v_d}{d} h^2 \\
\eta_\sigma &= 2^{d/2+2} N_c \frac{v_d}{d} h^2 \delta^{-1} \\
\eta_\psi &= 0 \\
\frac{d}{dt} \delta &= \delta(\eta_\pi - \eta_\sigma)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Dieses System von Gleichungen lässt sich explizit lösen [15]. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
h^2(t) &= Z_\pi^{-1}(t) = \frac{h_I^2}{1 - 2^{d/2+2} N_c \frac{v_d}{d} h_I^2 t}, \quad Z_\psi(t) = 1, \\
u(t, \tilde{\rho}) &= e^{-dt} u_I \left(e^{(d-2)t} \tilde{\rho} \frac{h^2(t)}{h_I^2} \right) - 2^{d/2+2} N_c v_d \int_0^t dr e^{-dr} l_0^{(F)d} \left(\frac{1}{2} h^2(t) \tilde{\rho} e^{(d-2)r} \right) \\
\delta(t) &= 1.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

wobei $u_I(\tilde{\rho}) \equiv u(0, \tilde{\rho})$ das Anfangspotential ist. Das Potential zeigt die erwartete Entwicklung: für ein lineares Anfangspotential (Abbildung 7.1) ist die Symmetrie bei $t = -1$ bereits gebrochen (Abbildung 7.2). Dies wurde durch die fermionischen Fluktuationen induziert. Wenn, wie im vollen Modell der Fall, auch die bosonischen Fluktuationen berücksichtigt werden, wird die Symmetriebrechung natürlich nicht zum selben Zeitpunkt einsetzen. Die Yukawakopplung (Abbildung 8.2) fällt mit großen t schnell ab und strebt im Infraroten auch ohne bosonische Fluktuationen gegen einen konstanten Wert. Die bosonische Wellenfunktionsrenormierung (Abbildung 8.1) sollte also im Anfangslaufen der vollen Flussgleichungen einen linearen Anstieg zeigen.

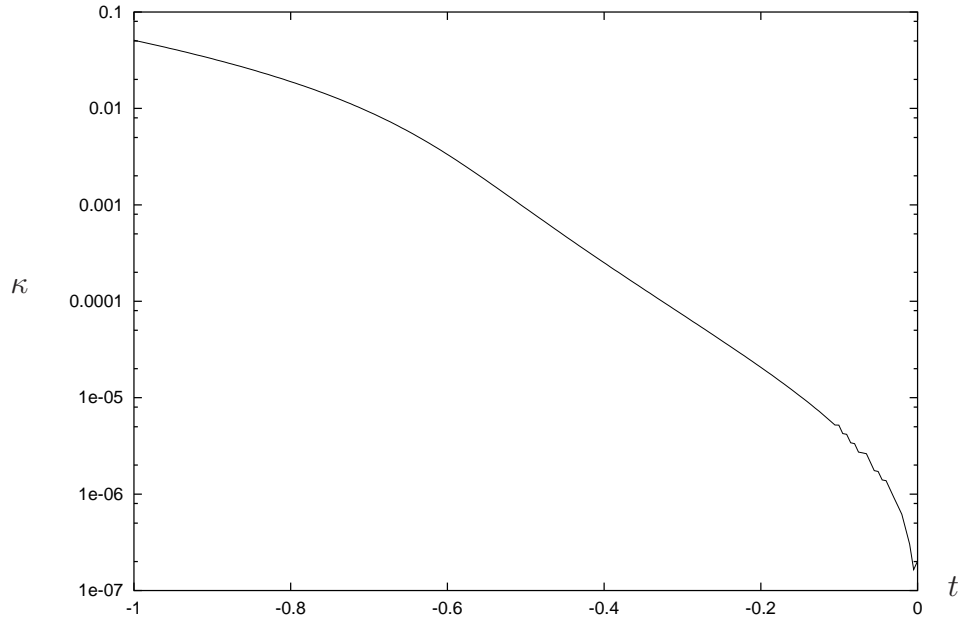


Abbildung 6: Minimum des vollen Fixpunkt–Potentials $u = u_k - j\sqrt{\tilde{\rho}}$ (Ordinate in logarithmischem Maßstab)

Betrachten wir die Evolution des Minimums des vollen Potentials, also $u_k - j\sqrt{\tilde{\rho}}$, so erkennen wir einen exponentiellen Verlauf. Das Minimum ändert sich über viele Größenordnungen ($\kappa(t=0) \approx 10^{-7}$), wie in Abbildung 6 deutlich wird.

Die Lösung weist ein wichtiges Verhalten auf, das zentral für die Aussagekraft des Quark–Meson–Modells ist. Im Folgenden setzen wir für den hier vorliegenden Fall $d = 4$ und damit $v_4^{-1} = 32\pi^2$. Entwickelt man die Lösung um $\tilde{\rho} = 0$, so erhält man für $n > 2$:

$$\frac{u^{(n)}(t, 0)}{h^{2n}(t)} = e^{2(n-2)t} \frac{u_I^{(n)}(0)}{h_I^{2n}} + \frac{N_c}{\pi^2} \frac{(-1)^n (n-1)!}{2^{n+2} (n-2)} t_n^{(F)4}(0) [1 - e^{2(n-2)t}]. \quad (4.26)$$

Speziell für $n = 2$ bekommt man:

$$\frac{u^{(2)}(t, 0)}{h^2(t)} = 1 - \frac{1 - \frac{u_I^{(2)}(0)}{h_I^2}}{1 - \frac{N_c}{8\pi^2} h_I^2 t} \quad (4.27)$$

Das bedeutet, dass alle Anfangswerte der Kopplungen für kleiner werdendes t rasch unwichtig werden und $u^{(n)}/h^{2n}$ gegen einen Fixpunkt strebt. Numerisch sieht man auch, dass dies typischerweise passiert, bevor der Übergang von der symmetrischen in die gebrochene Phase erreicht ist und die Näherung zusammenbricht. Der Anfangswert für die renormierte

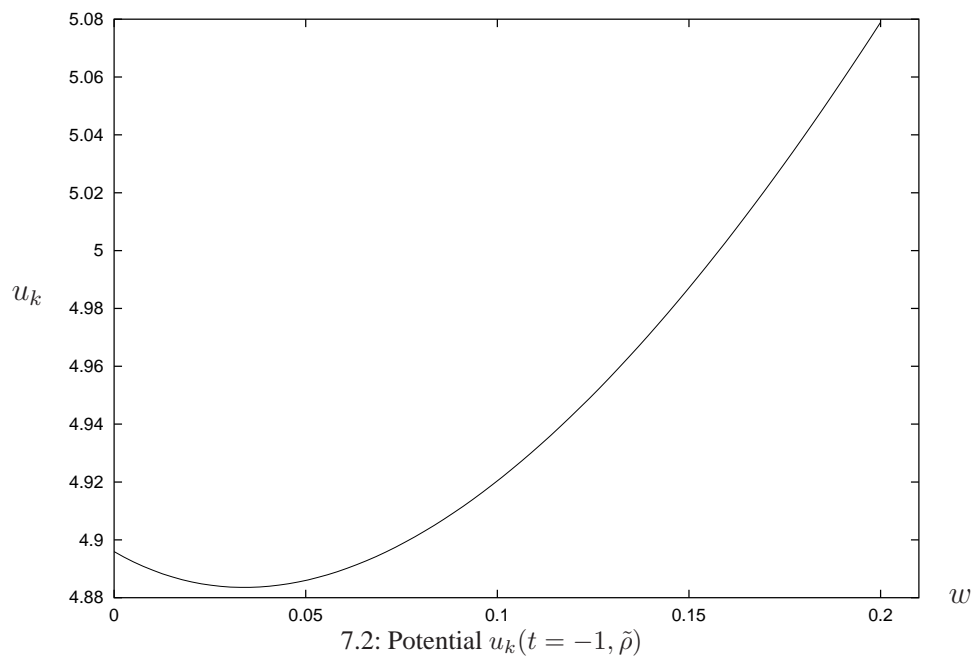
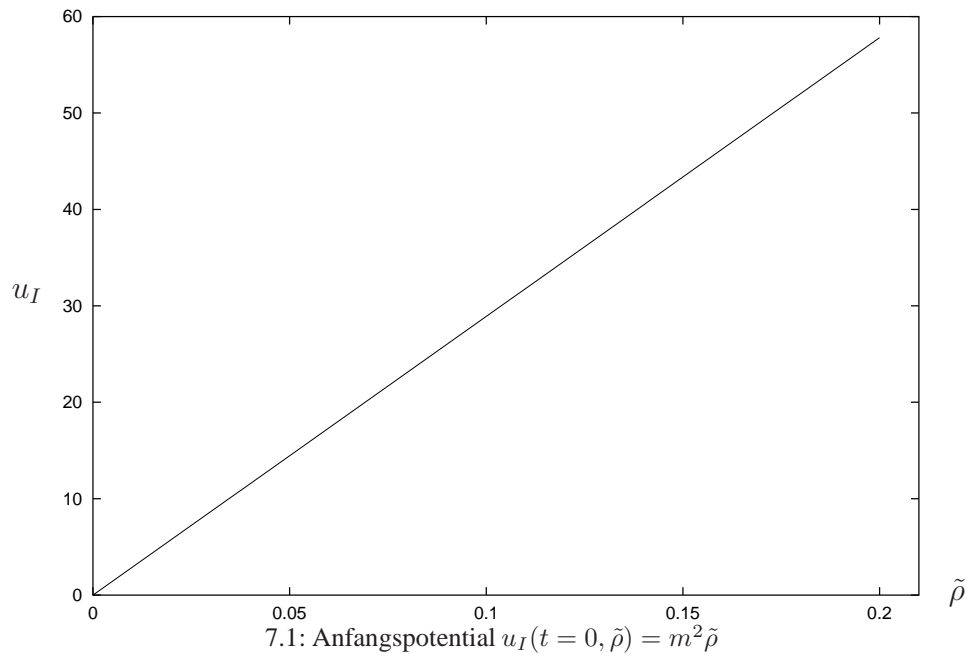


Abbildung 7: Fixpunkt–Potential

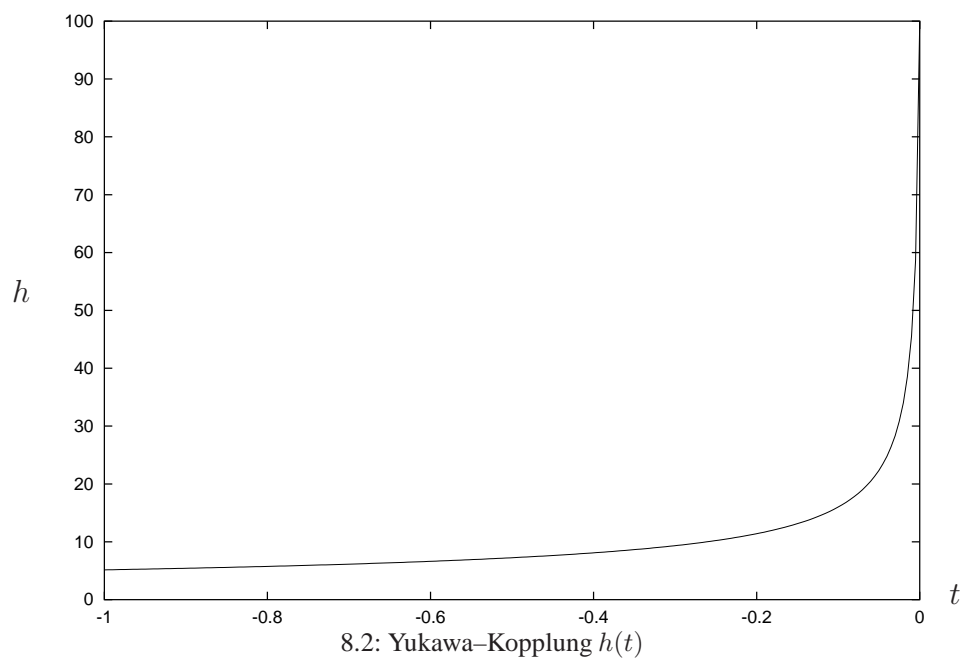
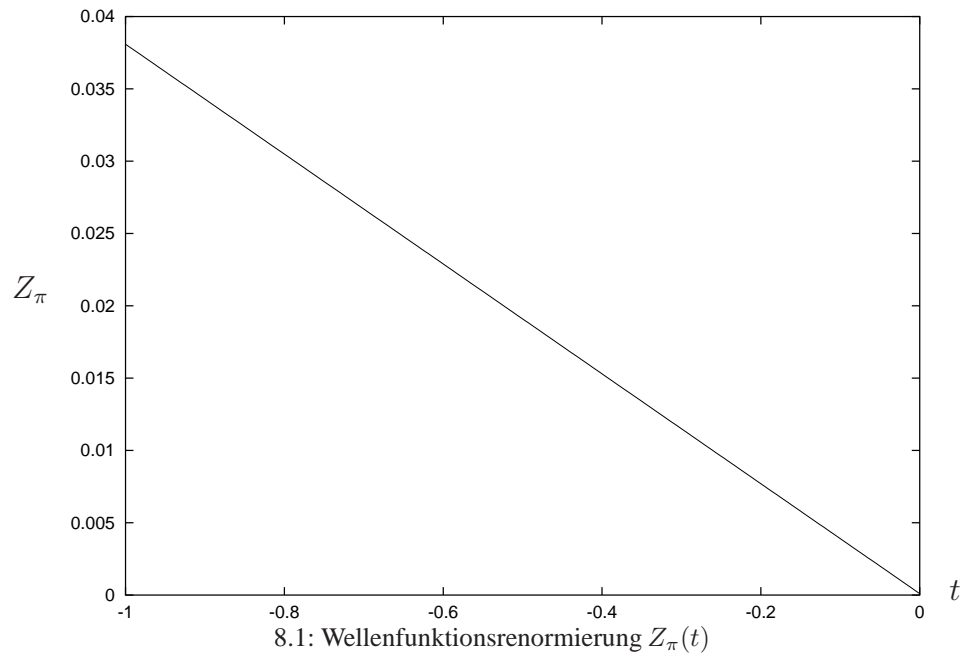


Abbildung 8: Wellenfunktionsrenormierung und Yukawa-Kopplung in der Fixpunkt-Näherung

nackte Masse hingegen ist nicht zu vernachlässigen, wie man an

$$\frac{u_I'(0)}{h_I^2} = \frac{\overline{m}_{k_\Phi}^2}{k_\Phi^2} \quad (4.28)$$

sieht. Die relevanten Parameter des linearen Quark–Meson Modells für zwei Flavor sind also auf die Skala k_Φ und die Masse $\overline{m}_{k_\Phi}^2$ beschränkt (neben der Quarkmasse \hat{m}). Interessant wird die Frage sein, ob sich dieses Verhalten auf den Fall von drei Flavor übertragen lässt.

Es sei an dieser Stelle bereits auf das alternierende Vorzeichen in der Entwicklung (4.26) hingewiesen, das eine wichtige Rolle bei der numerischen Untersuchung spielen wird.

4.4 Berechnung der Parameter des Modells

Wie berechnen wir nun die relevanten Parameter des Modells? Aus der Theorie lassen sie sich nicht ermitteln, also sind wir darauf angewiesen, sie an experimentelle Messwerte oder an phänomenologische Daten aus anderen Modellen anzufitten. Wir brauchen also drei Werte um die drei relevanten Parameter zu bestimmen. Hierzu bieten sich folgende Zahlen an:

$$\begin{aligned} \text{Pionenzerfallskonstante } f_\pi &= 92.4 \text{ MeV} \\ \text{Pionenmasse } m_\pi &= 135 \text{ MeV} \\ \text{Konstituenten–Quarkmasse } M_q &= (300 \dots 350) \text{ MeV} \end{aligned}$$

Da die Konstituenten–Quarkmasse relativ ungenau bestimmt ist, kann man alternativ auch einen Wert für das chirale Quarkkondensat $\langle \overline{\psi}\psi \rangle$ aus anderen Rechnungen zur Fixierung verwenden. In der hier verwendeten Trunkierung erhalten wir [15]

$$\begin{aligned} f_{\pi,k} &= 2\sigma_{0,k} , \\ m_{\pi,k}^2 &= Z_{\pi,k}^{-1/2} \frac{\overline{m}_{k_\Phi}^2 \hat{m}}{\sigma_{0,k}} , \\ M_{q,k} &= h_k \sigma_{0,k} , \\ \langle \overline{\psi}\psi \rangle_k &= -2\overline{m}_{k_\Phi}^2 \left[Z_{\pi,k}^{-1/2} \sigma_{0,k} - \hat{m} \right] . \end{aligned} \quad (4.29)$$

wobei $\sigma_{0,k}$ das dimensionsbehaftete renormierte Minimum des Potentials ist, oder genauer gesagt

$$\sigma_{0,k} = k\sqrt{\kappa/2} \quad (4.30)$$

und $h_k = Z_{\pi,k}^{-1/2} Z_{\psi,k}^{-1} \bar{h}_k$. Damit ergibt sich als Strategie zur Fixierung der Parameter: Die Pionzerfallskonstante setzt die Skala k_Φ fest, wegen $k = k_\Phi e^t$ einerseits und $k = f_\pi / \sqrt{2\kappa}$ andererseits. Es bleiben dann noch zwei freie Parameter, die durch Variation von $\bar{m}_{k_\Phi}^2$ und \hat{m} an (4.29) angepasst werden sollen.

Eine echte Vorhersage des Modells ist die Masse des σ -Mesons, die in unserer Trunkierung gegeben ist durch

$$m_{\sigma,k}^2 = \left(Z_{\pi,k}^{-1/2} \frac{\bar{m}_{k_\Phi}^2 \hat{m}}{\sigma_{0,k}} + 4\lambda_k \sigma_{0,k}^2 \right) \delta^{-1} , \quad (4.31)$$

wobei $\lambda_k = u_k''(\kappa)$ ist. Ihr Wert ist ein guter Test für die Brauchbarkeit des Modells. Experimentell [16] findet man einen Bereich von ungefähr $400 \text{ MeV} \leq m_{\sigma,k} \leq 1200 \text{ MeV}$. Bisherige Untersuchungen [1] haben gezeigt, dass erst durch die Einbeziehung des strange-Quarks realistische Werte zu erwarten sind. Dennoch ist eine Abschätzung durch unsere verbesserte Trunkierung und damit durch den Wert von δ eine wichtige Vorarbeit zum Test des Modells.

5 Numerische Analyse des Quark–Meson Modells

In diesem Kapitel sollen Ansätze für eine numerische Lösung der Flussgleichungen untersucht werden. Zunächst werden die Probleme bei der Integration der Flussgleichungen besprochen. Es stellt sich heraus, dass die Gleichungen einen hohen Grad an Instabilität besitzen. Dies führt dazu, dass quantitativ exakte Aussagen mit herkömmlichen Verfahren nur schwierig zu erzielen sind. Alternative Verfahren und Strategien werden erörtert und die Ergebnisse besprochen.

5.1 Numerische Ansätze und Probleme

Um über die vielversprechende qualitative Analyse des linearen Quark–Meson–Modells im letzten Kapitel hinaus quantitative Aussagen zu gewinnen, sind wir auf eine numerische Integration der Flussgleichungen (4.10) bis (4.23) angewiesen. Es handelt sich bei diesen Flussgleichungen um ein gekoppeltes System einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung für das mittlere effektive Potential, und sechs gewöhnliche Differentialgleichungen für die Größe δ , die Wellenfunktionsrenormierungen Z_π , Z_σ und Z_ψ , die Yukawakopplung h^2 und das Minimum des Potentials κ . Als Anfangsbedingung sind das Potential und alle eben genannten Größen an der Skala k_Φ gegeben: wir haben es mit einem Anfangswertproblem zu tun. Da die Ableitung nach der Skala $t = \ln(k/k_\Phi)$ isoliert auf einer Seite der Gleichungen auftaucht, können wir das System als Zeitevolution auffassen.

Aufgrund der Eigenschaften der Schwellenfunktionen haben wir eine Vorstellung für das Verhalten der Lösung. Die Frage ist, ob sich dieses auf die numerische Formulierung übertragen lässt?

Bisherige Arbeiten (vgl. [17]) zu rein bosonischen Modellen (also ohne die fermionischen Terme in den Gleichungen) legten es nahe, folgende Diskretisierung der Flussgleichungen zu verwenden: das Potential wird in der Variablen $\tilde{\rho}$ auf ein Gitter gelegt, d.h. es lebt auf den Punkten $u_k(\tilde{\rho}_i)$ ($i = 1, \dots, N$ mit $N = \text{Anzahl der Gitterpunkte}$). Gleichzeitig werden die Ableitungen des Potentials nach $\tilde{\rho}$ aus den Werten des Potentials auf dem Gitter berechnet, zum Beispiel als finite Differenzen (In dieser Arbeit wird ein Polynom 4. Grades durch fünf benachbarte Punkte gelegt, weil wir die dritte Ableitung benötigen, etwa in der Flussgleichung des Minimums). Auf diese Weise haben wir die partielle Differentialgleichung für das Potential in N gewöhnliche gekoppelte Differentialgleichungen transformiert. Nun kann man auf Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgreifen. Bei den bosonischen Modellen hat sich ein Runge–Kutta Integrator mit adaptiver Schrittweitenanpassung als günstig erwiesen, da er einen guten Kompromiss

zwischen Genauigkeit und Schnelligkeit darstellt.

Um nun die Evolution des Potentials zu verfolgen, müssen wir uns auf einen geeigneten $\tilde{\rho}$ -Ausschnitt beschränken, da wir mit dem Computer nur einen endlichen Bereich untersuchen können. Hierzu es ist nötig, die relevanten Skalen in unserem Problem zu kennen: Zur Normierung setzen wir die Compositeness Skala $k_\Phi = 1$ und machen damit alle Größen dimensionslos. $k_\Phi = 1$ wird am Ende der Evolution durch die Pionzerfallskonstante bestimmt. Die Numerik wird dann von drei wichtigen Größen beherrscht, nämlich der Masse \overline{m}_{k_Φ} , der Wellenfunktionsrenormierung Z_π (im linearen Quark–Meson Modell ist dieser Wert klein $\approx 10^{-4}$) und dem Wert des Minimums κ an der Compositeness Skala, der mit dem Wert der Quarkmasse zusammenhängt. Wir erwarten aus früheren Rechnungen etwa folgende Größenordnungen (alle Werte sind ab jetzt relativ zur Compositeness Skala angegeben, die von der Größenordnung 600 MeV sein sollte, vgl. Kapitel 3.2):

$$\begin{aligned}\overline{m}_{k_\Phi} &\approx 10^{-1} \\ \hat{m} &\approx 10^{-2} \\ \text{und damit } \kappa &\approx 10^{-7}\end{aligned}$$

Für realistische Ergebnisse erwartet man, dass der Wert des Minimums am Ende der Evolution bei 10^{-2} liegt. Deshalb müssen wir versuchen, den Fluss des Potentialsminimums über viele Größenordnungen zu verfolgen. Wir haben also sehr unterschiedliche Skalen in unserem Problem. Die Numerik wird hierdurch sehr empfindlich für Rundungs- und Trunkierungsfehler in der Diskretisierung. Weiterhin müssen in jedem Integrationsschritt die Schwellenfunktionen numerisch integriert werden, wodurch ebenso Fehler eingetragen werden.

In der Tat hat sich nach genauester Untersuchung gezeigt, dass sich das oben vorgeschlagene Verfahren hochgradig instabil verhält. Kleine Störungen im Potentialverlauf, die durch die genannten Fehler induziert werden, schaukeln sich zu enorm großen Oszillationen auf und verursachen unsinnige Ergebnisse.

5.2 Neue Strategien zur Integration der Flussgleichungen

Die im letzten Abschnitt angesprochenen Instabilitäten kommen mitunter daher, dass die Ableitungen des Potentials lokal durch ein Polynom vierter Ordnung berechnet werden, was den Oszillationen Nahrung gibt. Ausserdem kommt die in Abschnitt 4.3 besprochene Komplikation hinzu, dass die Koeffizienten der nach Kopplungen entwickelten Lösung

alternierende Vorzeichen haben. Das führt dazu, dass selbst wenn man einen großen Ausschnitt des Potentials betrachtet, am rechten Rand – also für große $\tilde{\rho}$ – sehr schnell Oszillationen entstehen.

An dieser Stelle kann man sich durchaus eine stabilere Methode vorstellen: Aus allgemeinen Betrachtungen [7] weiss man, dass $U_k(\rho) \geq -p_0$, wobei p_0 eine positive Konstante ist. Diese Information könnte man direkt in die Berechnung der Ableitungen einfließen lassen, um die Integration des Potentials zu stabilisieren. Arbeiten hierzu sind im Gange.

Ein anderer Ansatz funktioniert folgendermassen: Da wir die analytische Lösung für den Anfang der Evolution näherungsweise kennen, ließe sich diese Information verwenden, um das Anfangslaufen des Potentials zu stabilisieren. Die Idee ist, die Differenz der vollen Lösung minus der Fixpunkt-Lösung (so nennen wir ab jetzt die Lösung aus dem Abschnitt 4.3) in geeigneter Weise zu entwickeln und nur diese Entwicklungskoeffizienten zu integrieren. Die Vermutung ist, dass diese Differenz nicht sehr groß ist und sich zum Beispiel durch ein Polynom entwickeln lässt. In der Realisierung hat sich gezeigt, dass die Differenz bis zu einer gewissen Skala in der Nähe der Symmetriebrechung in der Tat klein bleibt, dies aber für die Koeffizienten des Polynoms nicht gilt. Ein globaler polynomialer Ansatz scheint daher nicht unbedingt gerechtfertigt. Mit Blick auf den Fall von drei Flavor scheint diese Methode auch nicht allgemein genug. Denn das Fixpunkt-Verhalten gilt in diesem Fall als nicht bewiesene Tatsache.

Die auftretenden Instabilitäten kommen – wie bereits erwähnt – daher, dass sich kleine Störungen rasch verstärken. Eine Möglichkeit die Integration zu stabilisieren besteht darin, das Potential in jedem Integrationsschritt zu glätten, so dass die Oszillationen erst gar nicht auftreten können. In Anbetracht der Regelmäßigkeit der Oszillationen scheint dies plausibel. Wie ist das möglich? Angesichts des erwarteten Verlaufs der Lösung, ist die Form des Potentials stets annähernd polynomial. Es liegt daher nahe, stückweise Polynome an das Potential anzufitten und aus diesem Fit die Ableitungen zu berechnen. Dies sollte eine bessere Näherung liefern, als global ein Polynom anzusetzen und garantiert die Stabilität der Lösung.

Bei dieser Methode ist es allerdings nicht einfach, Aussagen über die numerischen Fehler zu machen. Dies wäre aber ohnehin schwierig und auch im Falle von Trunkierungen des Potentials nicht möglich. Durch Erhöhung der Anzahl der angefitteten Polynome lässt sich allerdings abschätzen, ob die Näherung in die richtige Richtung verläuft. Diese Methode wurde unter anderem mit der Differentialgleichung für das Fixpunkt-Potential und boson-

nischen $O(N)$ Modellen im Falle großer N getestet, wo analytische Lösungen vorliegen. In allen Fällen lieferte es hervorragende Übereinstimmung. Man kann also zumindest am Anfang der Evolution bis zum Zeitpunkt der Symmetriebrechung eine hohe Genauigkeit erwarten. In diesem Bereich ist ausserdem der Wert des Minimums noch sehr klein und somit ist der Fehler bei der Berechnung κ -abhängiger Größen in den Termen der Flussgleichungen gering.

In Ermangelung eines stabilen Integrators werden wir eben vorgeschlagenes Verfahren daher verwenden, um im nächsten Abschnitt quantitative Ergebnisse zu gewinnen. Neben seiner Stabilität erweist sich dieses Verfahren auch als äußerst schnell. Zu Details der Implementierung siehe Anhang D.

Damit ist die Suche nach stabilen Verfahren natürlich nicht beendet. Implizite oder halb-implizite Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen sorgen für wesentlich mehr Stabilität, sind aber gleichzeitig auch um einiges teurer, da mehr Information über die rechten Seiten benötigt wird. Hier wurde bereits Vorarbeit geleistet (siehe Anhang D). Zusammen mit einer stabilen Ableitungsbestimmung kann man zuversichtlich sein, ein stabiles Verfahren an die Hand zu bekommen, um im Fall von drei Flavor nicht mit den gleichen Problemen konfrontiert zu werden.

5.3 Quantitative Ergebnisse

Für die Numerik ist es vorteilhaft, die Flussgleichungen für dimensionsbehaftete Größen zu untersuchen, denn wir erwarten, dass der Fluss des Minimums für $k \rightarrow 0$ stationär wird. Dies ist natürlich nicht der Fall, wenn wir dimensionslose Größen betrachten. Wir behalten weiterhin $k_\Phi = 1$ bei.

Wenden wir das Verfahren, wie im letzten Abschnitt besprochen, auf die Flussgleichungen an, so finden wir in der anfänglichen Evolution tatsächlich das qualitative Verhalten wieder, das wir in Abschnitt 4.3 analytisch untersucht haben. Das Potential wird in der Nähe des Ursprungs, also für kleine $\tilde{\rho}$, stark nach unten gekrümmt. In dem Bereich um $t \approx 0.4$ wird die Symmetrie des mittleren effektiven Potentials gebrochen. Dies entspricht etwa 300 bis 400 MeV. Nun werden die bosonischen Fluktuationen relevant. Sie beginnen das Laufen des Minimums und kämpfen gegen die fermionischen Fluktuationen an. Dieser Widerstreit in der Nähe von $\tilde{\rho} = 0$ spiegelt sich darin wieder, dass das Potential langsam konvex wird. Hier kann es passieren, dass die Argumente der Schwellenfunk-

tionen sinnlos werden, falls sie kleiner werden als der Wert des Minimums der Funktion $p(y) + y(\delta + 1)$, der Pol der bosonischen Schwellenfunktionen. Das hängt damit zusammen, dass $\Gamma_k + \text{Cutoff}$ durch eine Legendretransformation aus W_k hervorgeht und damit konvex ist. Doch ist in diesem Fall das analytische Verhalten der Lösung bekannt [7] und man kann diesen Bereich von der numerischen Behandlung ausschließen. Für praktische Zwecke dieser Arbeit genügt es zum Beispiel zu einer modifizierten Cutoff-Funktion überzugehen: $R_k \rightarrow 4R_k$, was deren allgemeine Eigenschaften (vgl. Kapitel 2.2) nicht beeinträchtigt.

Es ist zu bemerken, dass das Verhalten der Lösung in dem zuletzt genannten Regime möglicherweise von unserem Verfahren nicht sehr exakt erfasst wird, da das Potential in dem Bereich um $\tilde{\rho} = 0$ sehr stark variiert. Da sich der Fluss des Minimums und der bosonischen Wellenfunktionsrenormierung zu diesem Zeitpunkt nicht mehr stark ändern, hoffen wir deshalb auf quantitativ akzeptable Ergebnisse. Der typische Fluss ist zur Verdeutlichung in den Abbildung 9.1 bis 11.2 dargestellt. Aus phänomenologischen Rechnungen für den 3-Flavor Fall [1] erwartete man, dass der Quotient aus Goldstone- und radialer Wellenfunktionsrenormierung deutlich kleiner als 1 wird. Dies können wir auch in unserer verbesserten Trunkierung erkennen. Wir erwarten dadurch einen größeren Wert von m_σ (da nach (4.31) gilt: $m_\sigma \sim \delta^{-1}$) gegenüber einer Trunkierung ohne Unterscheidung der Goldstone- und der radialen Wellenfunktionsrenormierung. Man sieht in Abbildung 10.1 deutlich, wie dieser Unterschied erst mit Beginn der gebrochenen Phase zu Tage tritt. Würde man das Potential noch weiter nach kleineren t verfolgen, so könnte man das Konvexwerden beobachten. Da wir aber primär an dem Wert des Minimums interessiert sind, können wir bei $t \approx -3$ die Evolution beenden, da sich keine Größe mehr ändert.

Die Anpassung der Parameter an die phänomenologischen Werte erfolgt folgendermaßen: wir berechnen für den Bereich, in dem wir vernünftige Werte der Parameter erwarten, die phänomenologischen Werte als Funktion von \overline{m}_{k_Φ} und \hat{m} . Die Pionzerfallskonstante f_π setzt zunächst die Compositeness-Skala k_Φ fest. An den resultierenden Verläufen bestimmen wir die besten Übereinstimmungen.

Nach Anpassung realistischer Werte für $f_\pi \approx 92 \text{ MeV}$ und $m_\pi \approx 135 \text{ MeV}$ erhalten wir zum Beispiel für die Parameters des Modells

$$\begin{aligned} k_\Phi &\approx 520 \text{ MeV} \\ \overline{m}_{k_\Phi} &\approx 82 \text{ MeV} \\ \hat{m} &\approx 18 \text{ MeV} \end{aligned}$$

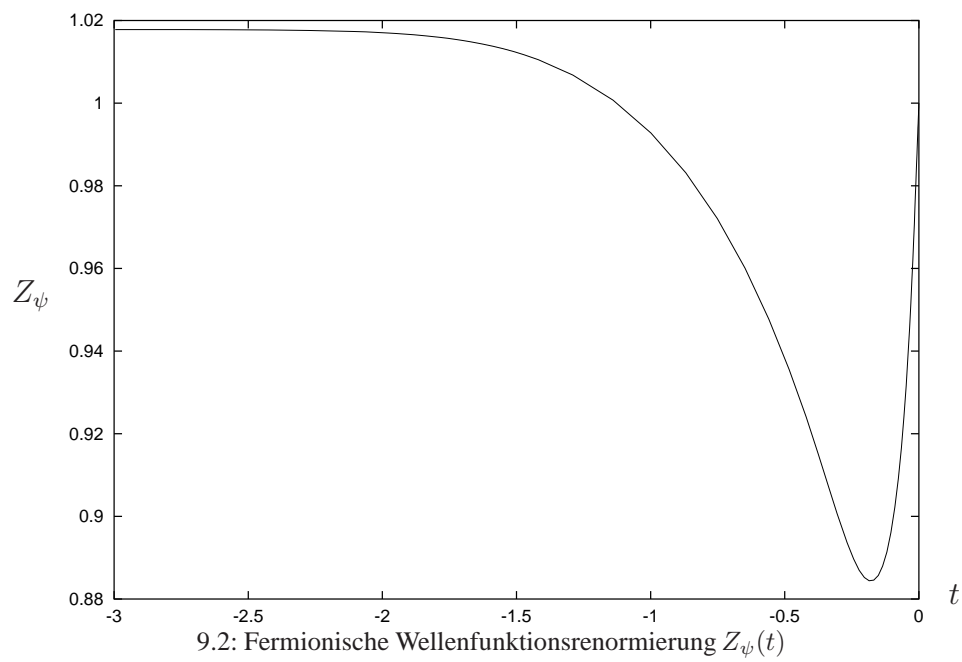
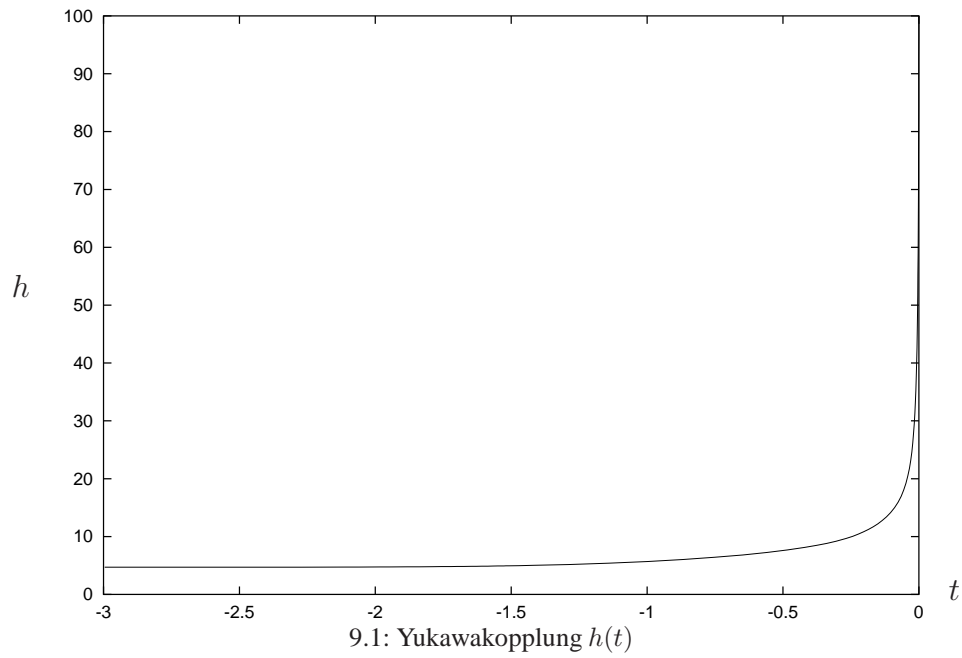
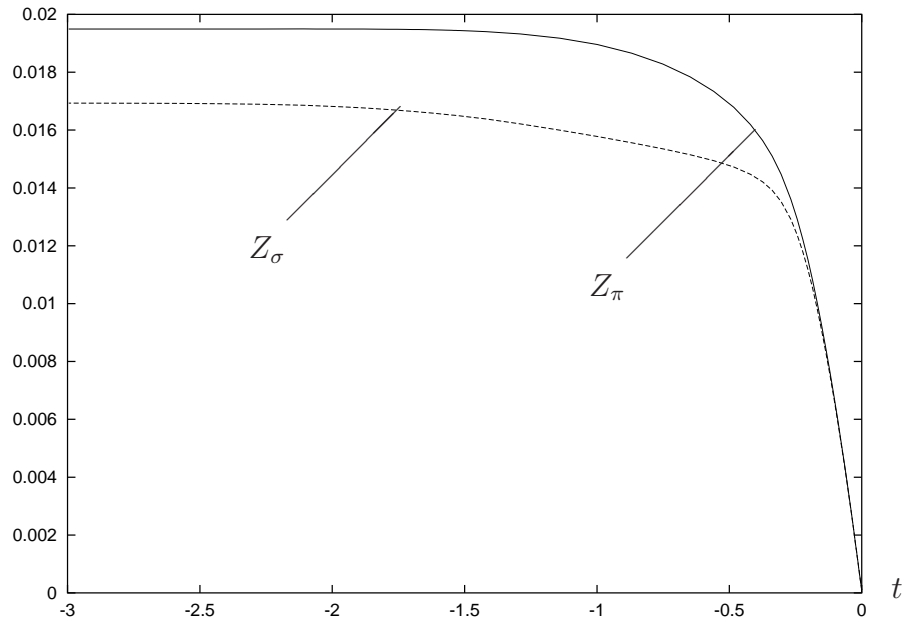
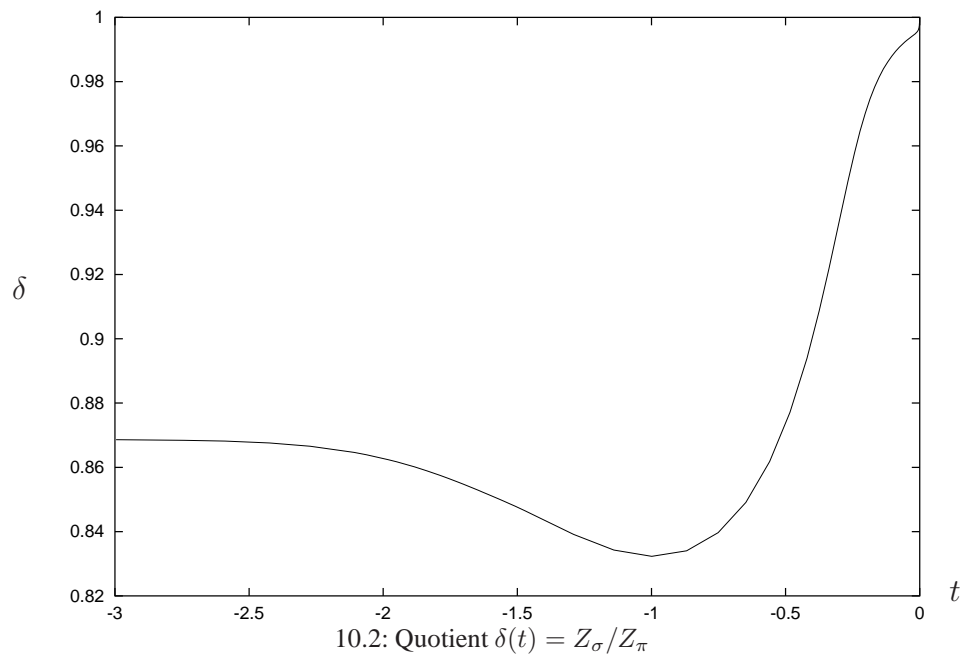


Abbildung 9: Yukawakopplung und fermionische Wellenfunktionsrenormierung (volle Flussgleichungen)



10.1: Bosonische Wellenfunktionsrenormierungen $Z_\pi(t)$ (durchgezogene Linie) und $Z_\sigma(t)$ (gestrichelte Linie)



10.2: Quotient $\delta(t) = Z_\sigma/Z_\pi$

Abbildung 10: Bosonische Wellenfunktionsrenormierungen

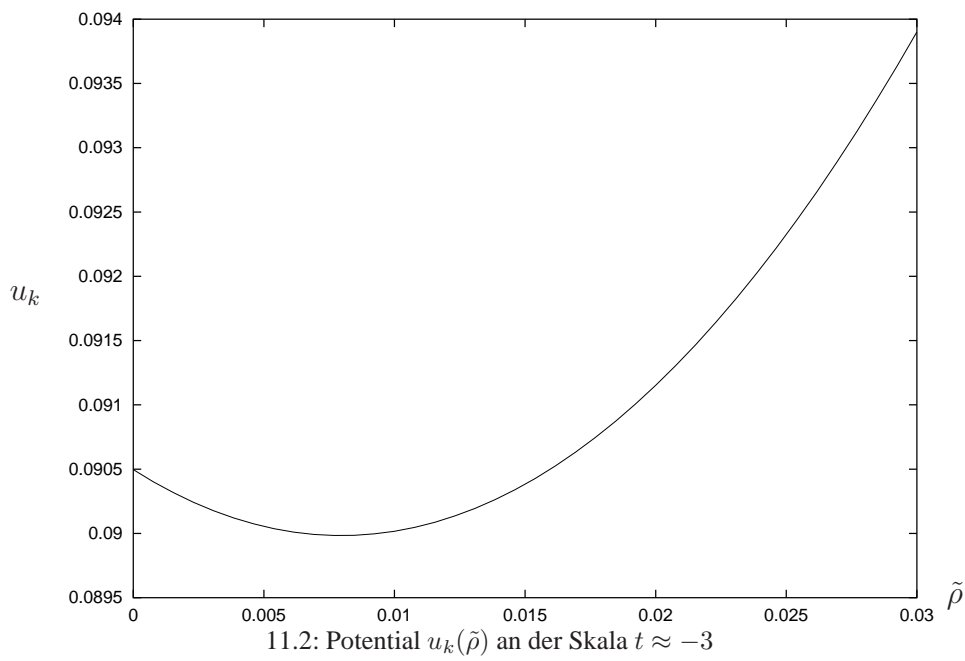
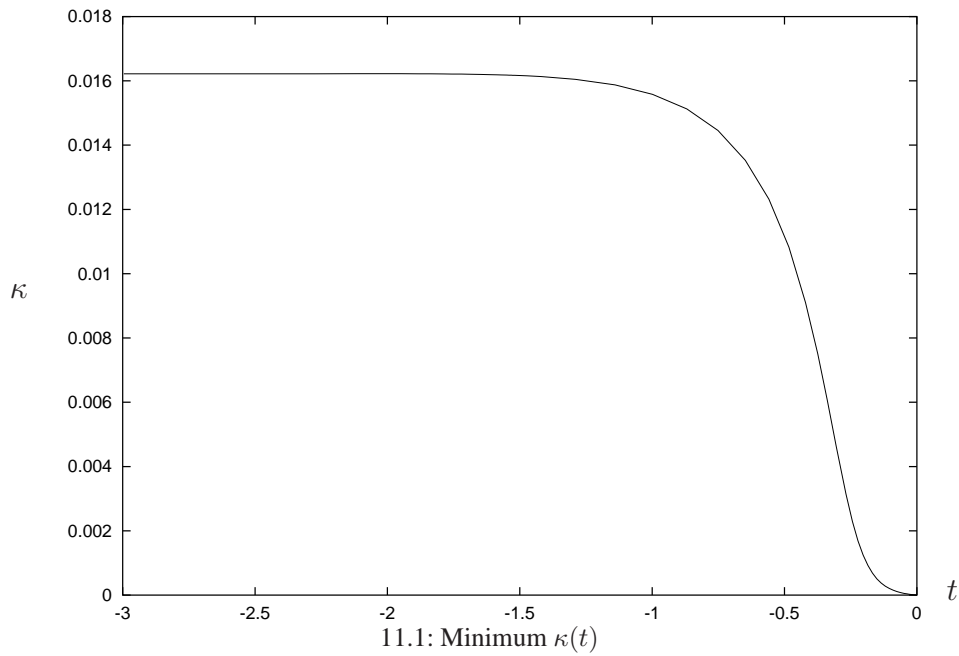


Abbildung 11: Volles Potential und die Evolution des Minimums

und somit für die Werte am Ende der Evolution $k \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} M_q &\approx 220 \text{ MeV} \\ \langle \bar{\psi}\psi \rangle_0 &\approx -(162 \text{ MeV})^3 \\ m_\sigma &\approx 420 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Diese Parameter entsprechen ziemlich genau den Werten früherer Berechnungen [1], in denen ein trunkiertes Potential angesetzt wurde, und den Erwartungen aus Abschnitt 3.2. Allerdings resultiert ein etwas abweichender Wert für die Konstituentenquarkmasse M_q , der zu niedrig erscheint. Diese Abweichung hat folgende mögliche Ursachen: a) unser numerisches Verfahren wird gegen Ende der Evolution ungenau, b) frühere Trunkierungen des Potentials liefern ungenaue Werte oder c) die Trunkierung der mittleren effektiven Wirkung ist ungenügend. Um den Wert von M_q näher an den realistischen Wert von 300 – 350 MeV kommen zu lassen, finden wir – wiederum für obige Werte von f_π und m_π den Satz von Parametern

$$\begin{aligned} k_\Phi &\approx 480 \text{ MeV} \\ \bar{m}_{k_\Phi} &\approx 60 \text{ MeV} \\ \hat{m} &\approx 30 \text{ MeV} \end{aligned}$$

und somit für die Werte am Ende der Evolution $k \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} M_q &\approx 270 \text{ MeV} \\ \langle \bar{\psi}\psi \rangle_0 &\approx -(140 \text{ MeV})^3 \\ m_\sigma &\approx 600 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir einen größeren Wert für m_σ . Dennoch sind in beiden Fällen die Stromquarkmassen \hat{m} um eine Größenordnung zu hoch. Dies ist ein Indiz dafür, dass bei der Dynamik der Mesonen auf der Skala der chiralen Symmetriebrechung das strange-Quark eine wichtige Rolle spielt und nicht vernachlässigt werden darf. Es ist weiterhin festzuhalten, dass der Wert der Pionzerfallskonstante und des chiralen Kondensates nur wenig von der Einstellung der Parameter an der Compositeness-Skala k_Φ abhängen, wie sich exemplarisch an obigen Parametersätzen ablesen lässt.

Für die Untersuchung nicht-universeller Eigenschaften bei endlicher Temperatur ist die Größe $f_\pi^{(0)} = f_\pi(\hat{m} = 0)$ von Interesse [1]. Wir verwenden zur Eichung den ersten

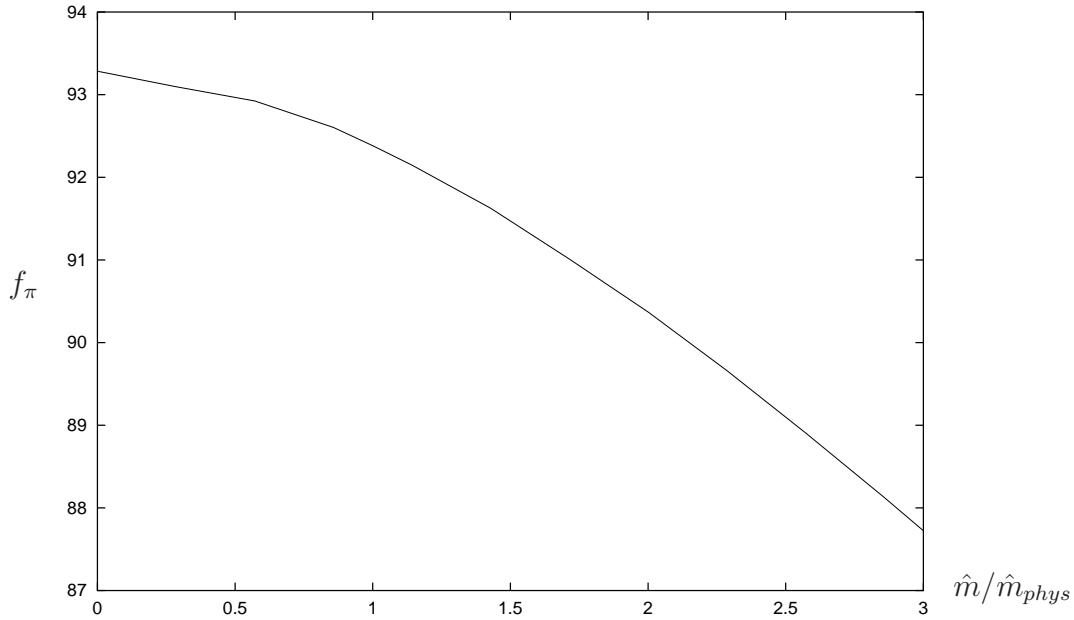


Abbildung 12: Pionzerfallskonstante f_π in MeV als Funktion von \hat{m}/\hat{m}_{phys}

Parametersatz und erhalten die in Abbildung 12 dargestellte Abhängigkeit der Pionzerfallskonstante f_π von \hat{m}/\hat{m}_{phys} , wobei \hat{m}_{phys} der geeichte Wert der Quarkmasse ist. Auch hier lässt sich gut erkennen, wie wenig das Ergebnis von der Anfangsbedingung abhängt. Es ist zu bemerken, dass besonders für kleine Werte von \hat{m}/\hat{m}_{phys} numerische Ungenauigkeiten auftreten können. Dies ist hier möglicherweise der Fall, denn in erster Ordnung berechnet man [1]

$$f_\pi - f_\pi^{(0)} = \frac{f_\pi m_\pi^2}{m_\sigma^2}, \quad (5.1)$$

was nicht konsistent mit Abbildung 12 ist, da hier die Differenz $f_\pi - f_\pi^{(0)}$ negativ ist. Dennoch ist die Abweichung zwischen f_π und $f_\pi^{(0)}$ nicht sehr groß und sollte mit einer genaueren numerischen Methode (vgl. Abschnitt 5.2) verbessert werden.

Alles in allem geben die hier gefundenen Werte das Vertrauen, dass wir uns auf dem richtigen Weg befinden, um zu quantitativ genauen Aussagen im Rahmen des drei-Flavor-Modells zu gelangen.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben versucht in dieser Arbeit zu zeigen, dass die effektive Theorie, die das lineare Quark–Meson Modell genannt wird, eine erfolgreiche qualitative sowie quantitative Beschreibung der chiralen Dynamik, insbesondere der spontanen Symmetriebrechung, liefert.

Da wir an einem Energiebereich interessiert sind, an dem die starke Wechselwirkung mit perturbativen Methoden nicht zugänglich ist, haben wir zunächst den Formalismus der mittleren effektiven Wirkung und ihrer Skalenabhängigkeit dargelegt. Er verschafft einen formalen sowie intuitiven Zugang zu diesem Regime. Mit Hilfe der Sprache dieses Formalismus und phänomenologischen Argumenten gelingt eine plausible Herleitung eines Modells an der Compositeness–Skala, an der sich leichte Mesonen zu formen beginnen. Diese Betrachtungen lieferten eine Trunkierung der mittleren effektiven Wirkung, die wir gegenüber früheren Arbeiten verbesserten:

$$\Gamma_k = \int d^d x \left\{ U_k(\rho) + \frac{1}{2} Z_\sigma(k) \partial_\mu \phi^1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} Z_\pi(k) \sum_{i=2}^4 \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi_i + Z_\psi(k) \bar{\psi}_a i \not{\partial} \psi^a + \frac{1}{2} \bar{h}(k) \bar{\psi}^a \left(\bar{\gamma} \phi_1 \delta_{ab} + i \sum_{j=2}^4 \phi^j \tau_j \right) \psi^b \right\}$$

Wir konzentrierten uns in dieser Arbeit auf den Fall zweier Quark–Flavor, da hier bereits methodische Probleme auftreten, die sich im komplizierteren Fall dreier Flavor wiederholen werden, aber wichtige Merkmale des Modells bereits hier zutage treten.

Aus der trunkierten Wirkung wurden in einem nächsten Schritt die Evolutionsgleichungen des mittleren effektiven mesonischen Potentials $U_k(\rho)$, der Wellenfunktionsrenormierungen $Z_\pi(k)$, $Z_\sigma(k)$, $Z_\psi(k)$ und der Yukawakopplung $\bar{h}(k)$ berechnet. Die in diesen Gleichungen auftretenden Schwellenfunktionen erlauben eine anschauliche qualitative Diskussion. Mehr noch findet man ein partielles Fixpunktverhalten in der Lösung, was dazu führt, dass die Lösung der Gleichung nur noch von wenigen relevanten Parametern abhängt, die aus phänomenologischen Größen bestimmt werden können. Dies hat große Auswirkungen auf die Vorhersagekraft des Modells.

Die oben angesprochenen methodischen Probleme treten bei der Lösung der Flussgleichung für das Potential auf. Es handelt sich dabei um eine nichtlineare partielle Differentialgleichung, die numerisch instabil ist. Wir fanden ein Verfahren, dass die Gleichung

trotzdem stabil löst, indem man das Potential stückweise polynomial approximiert. Wegen der Struktur der Flussgleichungen und numerischen Tests erwarten wir, dass dieses Verfahren quantitativ gute Ergebnisse erzielt. Die Symmetriebrechung lässt sich an der vollen Lösung der Flussgleichung für das Potential in einem Bereich von 300 bis 400 MeV feststellen. Für die Größe $\delta = Z_\sigma/Z_\pi$ finden wir einen aus phänomenologischen Rechnungen vorhergesagten Wert kleiner als 1 und die Masse der σ -Resonanz liegt im einem experimentell erlaubten Bereich von 400 bis 600 MeV. Die Konstituenten-Quarkmasse stellt sich als zu klein heraus, wenn man versucht realistische Werte für die Parameter, insbesondere die nackten Quarkmasse, einzustellen. Dies deutet wahrscheinlich darauf hin, dass der Einfluss des strange Quarks nicht zu vernachlässigen ist und in die Berechnung einbezogen werden muss. Generell ist festzustellen, dass das Modell recht robust gegenüber der Variation der Anfangsbedingungen ist.

Die Ergebnisse dieser Arbeit bestätigen frühere Arbeiten, in denen die Flussgleichung für ein trunkiertes Potential gelöst wurde. Sie weichen nicht sehr stark von den früheren Rechnungen ab. Untersuchungen am drei-Flavor-Fall haben gezeigt, dass man mit ähnlichen numerischen Problemen zu kämpfen haben wird, wie im Falle zweier Flavor. Aus diesen Gründen wurde in dieser Arbeit ein großes Gewicht auf die Weiterentwicklung numerischer Strategien gelegt, die auch im Falle dreier Flavor eingesetzt werden können.

Der nächste Schritt sollte deshalb die numerische Untersuchung der Flussgleichungen des drei-Flavor-Falles sein. Dort wird man insbesondere daran interessiert sein, das Fixpunktverhalten bei $T = 0$, das im $O(4)$ -Modell eine große Bedeutung hatte, wiederzufinden. Eine Untersuchung des Quark-Meson Modells zweier Flavor bei endlicher Temperatur und Baryonzahldichte wurde hier vernachlässigt, um die Numerik voranzutreiben. Dieses Projekt im Rahmen des drei-Flavor-Falles angehen zu können, ist durch vorliegende Bemühungen hoffentlich näher gerückt. Gleichzeitig zu den theoretischen Bemühungen hofft man nämlich auf experimentelle Signaturen von Phasenübergängen in Kollisionen mit Schwerionen.

A Schwellenfunktionen

In diesem Anhang geben wir eine vollständige Liste aller dimensionslosen Schwellenfunktionen, die in den Flussgleichungen und den Ausdrücken für die anomalen Dimensionen bei $T = 0$ auftauchen. Sie beinhalten den inversen skalaren mittleren Propagator $P(q)$ und den entsprechenden fermionischen Propagator P_F , die wie folgt gewählt werden können:

$$P_F(q) = P(q) \equiv q^2 (1 + r_F(q))^2 . \quad (\text{A.1})$$

Wir benützen die Abkürzungen

$$x = q^2 , \quad P(x) \equiv P(q) , \quad \dot{P}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x} P(x) , \quad \widehat{\partial} \dot{P} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \frac{\widehat{\partial}}{\partial t} P , \quad (\text{A.2})$$

etc., und die formale Definition

$$\frac{\widehat{\partial}}{\partial t} \equiv \frac{1}{Z_\pi(k)} \frac{\partial R_{k,B}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial P} + \frac{2}{Z_\psi(k)} \frac{P_F}{1 + r_F} \frac{\partial [Z_\psi(k) r_F]}{\partial t} \frac{\partial}{\partial P_F} . \quad (\text{A.3})$$

Die bosonischen Schwellenfunktionen lauten dann

$$\begin{aligned} l_n^d(w; \delta; \eta_\pi) &= l_n^d(w; \delta) - \eta_\pi \widehat{l}_n^d(w, \delta) \\ &= \frac{n + \delta_{n,0}}{2} k^{2n-d} \int_0^\infty dx x^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{1}{Z_\pi(k)} \frac{\partial R_{k,B}}{\partial t} \right) (P + x(\delta - 1) + wk^2)^{-(n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{n_1, n_2}^d(w_1, w_2; \delta_1, \delta_2; \eta_\pi) &= l_{n_1, n_2}^d(w_1, w_2; \delta_1, \delta_2) - \eta_\pi \widehat{l}_{n_1, n_2}^d(w_1, w_2; \delta_1, \delta_2) \\ &= -\frac{1}{2} k^{2(n_1+n_2)-d} \int_0^\infty dx x^{\frac{d}{2}-1} \times \\ &\quad \frac{\widehat{\partial}}{\partial t} \left\{ (P + x(\delta_1 - 1) + w_1 k^2)^{-n_1} (P + x(\delta_2 - 1) + w_2 k^2)^{-n_2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

wobei $n, n_1, n_2 \geq 0$ angenommen wird. Für $n \neq 0$ können die Funktionen l_n^d auch geschrieben werden als

$$l_n^d(w; \delta; \eta_\pi) = -\frac{1}{2} k^{2n-d} \int_0^\infty dx x^{\frac{d}{2}-1} \frac{\widehat{\partial}}{\partial t} (P + x(\delta - 1) + wk^2)^{-n} . \quad (\text{A.5})$$

Die fermionischen Funktionen sind analog dazu definiert als

$$\begin{aligned} l_n^{(F)d}(w; \eta_\psi) &= l_n^{(F)d}(w) - \eta_\psi \check{l}_n^{(F)d}(w) \\ &= (n + \delta_{n,0}) k^{2n-d} \int_0^\infty dx x^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{Z_\psi(k)} \frac{P_F}{1 + r_F} \frac{\partial [Z_\psi(k) r_F]}{\partial t} (P + wk^2)^{-(n+1)} . \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Ausserdem benötigen wir

$$\begin{aligned}
l_{n_1, n_2}^{(FB)d}(w_1, w_2; \delta; \eta_\psi, \eta_\pi) &= l_{n_1, n_2}^{(FB)d}(w_1, w_2; \delta) - \eta_\psi \check{l}_{n_1, n_2}^{(FB)d}(w_1, w_2; \delta) - \eta_\pi \hat{l}_{n_1, n_2}^{(FB)d}(w_1, w_2; \delta) \\
&= -\frac{1}{2} k^{2(n_1+n_2)-d} \int_0^\infty dx x^{\frac{d}{2}-1} \times \\
&\quad \widehat{\frac{\partial}{\partial t}} \left\{ \frac{1}{[P_F(x) + k^2 w_1]^{n_1} [P(x) + x(\delta - 1) + k^2 w_2]^{n_2}} \right\} \\
m_{n_1, n_2}^d(w_1, w_2; \delta_1, \delta_2; \eta_\pi) &= m_{n_1, n_2}^d(w_1, w_2; \delta_1, \delta_2) - \eta_\pi \hat{m}_{n_1, n_2}^d(w_1, w_2; \delta_1, \delta_2) \\
&= -\frac{1}{2} k^{2(n_1+n_2-1)-d} \int_0^\infty dx x^{\frac{d}{2}} \times \\
&\quad \widehat{\frac{\partial}{\partial t}} \left\{ \frac{\dot{P}(x) + (\delta_1 - 1)}{[P(x) + x(\delta_1 - 1) + k^2 w_1]^{n_1}} \frac{\dot{P}(x) + (\delta_2 - 1)}{[P(x) + x(\delta_2 - 1) + k^2 w_2]^{n_2}} \right\} \\
m_{n_1, n_2}^{(FB)d}(w_1, w_2; \delta; \eta_\psi, \eta_\pi) &= m_{n_1, n_2}^{(FB)d}(w_1, w_2; \delta) - \eta_\psi \check{m}_{n_1, n_2}^{(FB)d}(w_1, w_2; \delta) \\
&\quad - \eta_\pi \hat{m}_{n_1, n_2}^{(FB)d}(w_1, w_2; \delta) \\
&= -\frac{1}{2} k^{2(n_1+n_2-1)-d} \int_0^\infty dx x^{\frac{d}{2}} \times \\
&\quad \widehat{\frac{\partial}{\partial t}} \left\{ \frac{1 + r_F(x)}{[P_F(x) + k^2 w_1]^{n_1}} \frac{\dot{P}(x) + (\delta - 1)}{[P(x) + x(\delta - 1) + k^2 w_2]^{n_2}} \right\}. \\
\\
m_4^{(F)d}(w; \eta_\psi) &= m_4^{(F)d}(w) - \eta_\psi \check{m}_4^{(F)d}(w) \\
&= -\frac{1}{2} k^{4-d} \int_0^\infty dx x^{\frac{d}{2}+1} \widehat{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1 + r_F(x)}{P_F(x) + k^2 w} \right)^2 \\
m_2^{(F)d}(w; \eta_\psi) &= m_2^{(F)d}(w) - \eta_\psi \check{m}_2^{(F)d}(w) \\
&= -\frac{1}{2} k^{6-d} \int_0^\infty dx x^{\frac{d}{2}} \widehat{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\frac{\dot{P}_F(x)}{[P_F(x) + k^2 w]^2} \right)^2
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Die Abhängigkeit der Schwellenfunktionen von den anomalen Dimensionen kommt von der t -Ableitung, die auf $Z_\pi(k)$ und $Z_\psi(k)$ innerhalb der Ausdrücke $R_{k,B}$ und $Z_\psi(k)r_F$ wirkt. Für $\delta = 1$ bzw. $\delta_1 = \delta_2 = 1$ gehen diese Funktionen in die üblichen Schwellenfunktionen über, wie man sie für den Fall $Z_\sigma \approx Z_\pi$ kennt. In der hier angegebenen Form muss man noch die $\widehat{\partial}_t$ -Ableitung ausführen, um die in numerischen Rechnungen verwendbare Fassung der Flussgleichungen zu erhalten (vgl. zum Beispiel Anhang von [14]).

B Berechnung der Flussgleichungen

In diesem Anhang wollen wir die Herleitung der Flussgleichungen der k -abhängigen Größen aus ihren Definitionen exemplarisch skizzieren. Wir tun dies am Beispiel der pionischen Wellenfunktionsrenormierung $Z_\pi(k)$. Alle anderen Rechnungen verlaufen sehr ähnlich. Zu Rechnungen, die fermionische Ableitungen enthalten, werden am Ende des Abschnitts noch einige Bemerkungen gemacht.

Die Definition der skalaren **Wellenfunktionsrenormierung** Z_π lautete:

$$\begin{aligned} Z_\pi(k) &:= \frac{1}{3} \lim_{Q^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial Q^2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \sum_{i=2}^4 \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_i(-Q) \delta \phi^i(p)} \Big|_{vac} \\ &= \lim_{Q^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial Q^2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_2(-Q) \delta \phi^2(p)} \Big|_{vac} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Zur Berechnung des Flusses von Z_π wenden wir eine ∂_t Ableitung auf beide Seiten der Definition an und erhalten nach Ersetzen von $\partial_t \Gamma_k$ durch die exakte Renormierungsgruppen-gleichung (2.22)

$$\begin{aligned} \partial_t Z_\pi &= \lim_{Q^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial Q^2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\delta^2}{\delta \phi_1(-Q) \delta \phi^1(p)} \left(\frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \right)_{BB} \partial_t R_{k,B} \right] \right. \\ &\quad \left. - \text{Tr} \left[\frac{\delta^2}{\delta \phi_1(-Q) \delta \phi^1(p)} \left(\frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \right)_{\overline{FF}} \partial_t R_{k,F} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

wobei die Anmerkung, dass die Ausdrücke an der Vakuumkonfiguration ausgewertet werden, von nun ab nicht mehr explizit dazugeschrieben wird.

Ein wesentlicher Teil der weiteren Rechnung stellt die Berechnung der beiden Spuren in obiger Gleichung dar. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\delta \phi_1(-Q) \delta \phi^1(p)} \left(\frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \right) &= - \frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \frac{\delta^2 \Gamma_k^{(2)}}{\delta \phi_1(-Q) \delta \phi^1(p)} \frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \frac{\delta \Gamma_k^{(2)}}{\delta \phi_1(-Q)} \frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \frac{\delta \Gamma_k^{(2)}}{\delta \phi_1(p)} \frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \frac{\delta \Gamma_k^{(2)}}{\delta \phi_1(p)} \frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \frac{\delta \Gamma_k^{(2)}}{\delta \phi_1(-Q)} \frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

In der Trunkierung für das $O(4)$ Modell haben die Matrizen folgende Struktur:

$$\frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k} = \begin{pmatrix} G_{BB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{\overline{FF}} \\ 0 & G_{F\overline{F}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k^{(2)}}{\delta \phi_1(-Q) \delta \phi^1(p)} = \begin{pmatrix} B_{BB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta \Gamma_k^{(2)}}{\delta \phi_1(p)} = \begin{pmatrix} A_{BB}(p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{\overline{F}F}(p) \\ 0 & A_{F\overline{F}}(p) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

wobei G , A und B Matrizen sind. Die Matrizen G sehen zum Beispiel folgendermaßen aus (die Indizes $i, j \in \{0, \dots, 3\}$ repräsentieren Meson-Flavor):

$$\begin{aligned} G_{F\overline{F}}(q, q') &= -\frac{\delta(q, q')}{G_F(q)} \left\{ Z_\psi \not{q} (1 + r_F(q)) + \frac{1}{2} \overline{h} \phi_0 \overline{\gamma} \right\} \\ G_{\overline{F}F}(q, q') &= -G_{F\overline{F}}(q, q') \\ G_{BB}^{ij}(q, q') &= -\frac{\delta(q, q')}{G_{B1}(q)} \left\{ \delta_{ij} - \frac{\phi_0^2 U_k'' + q^2 (Z_\sigma - Z_\pi) \delta_{i0} \delta_{j0}}{G_{B2}(q)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

mit den wichtigen Abkürzungen:

$$\begin{aligned} G_F(q) &= Z_\psi^2 q^2 (1 + r_F(q))^2 + \frac{1}{4} \overline{h}^2 \phi_0^2 \\ G_{B1}(q) &= q^2 Z_\pi + R_{k,B} + U_k' \\ G_{B2}(q) &= q^2 Z_\sigma + R_{k,B} + U_k' + \phi_0^2 U_k'' \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Die Ausdrücke für die Matrizen A und B erhält man entsprechend durch mehrfaches Differenzieren der Trunkierung der mittleren effektiven Wirkung (4.4). Zur Algebra der euklidischen γ -Matrizen siehe Anhang C.

Nach Multiplikation aller Matrizen und anschließender Spurbildung, zunächst nur über den Boson-Fermion-Antifermion Raum, hat die Flussgleichung die Form

$$\begin{aligned} \partial_t Z_\pi &= \lim_{Q^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial Q^2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} [G_{BB} B_{BB} G_{BB}] \partial_t R_{k,B} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} [G_{BB} A_{BB}(-Q) G_{BB} A_{BB}(p) G_{BB} + (-Q \leftrightarrow p)] \partial_t R_{k,B} \\ &\quad \left. - \text{Tr} [G_{\overline{F}F} A_{\overline{F}F}(-Q) G_{\overline{F}F} A_{\overline{F}F}(p) G_{\overline{F}F} + (-Q \leftrightarrow p)] \partial_t R_{k,F} \right\} \\ &= \lim_{Q^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial Q^2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \widehat{\frac{\partial}{\partial t}} \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr} [G_{BB} B_{BB}] - \frac{1}{2} \text{Tr} [G_{BB} A_{BB}(-Q) G_{BB} A_{BB}(p)] \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr} [G_{\overline{F}F} A_{\overline{F}F}(-Q) G_{\overline{F}F} A_{\overline{F}F}(p)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Im letzten Schritt haben wir die Wirkung der $\widehat{\frac{\partial}{\partial t}}$ Ableitung ausgenutzt, um den Ausdruck weiter zu vereinfachen (Definition siehe Anhang A). Für unsere Trunkierung gilt nämlich

$$\begin{aligned}\widehat{\frac{\partial}{\partial t}}G_{\overline{FF}} &= -G_{\overline{FF}} \partial_t R_{k,F} G_{\overline{FF}} \\ \widehat{\frac{\partial}{\partial t}}G_{\overline{BB}} &= -G_{\overline{BB}} \partial_t R_{k,B} G_{\overline{BB}}\end{aligned}\tag{B.8}$$

Ausserdem haben wir uns bei der Umformung in Gleichung B.7 die Spur-Eigenschaft der Zyklizität zunutze gemacht.

Nach Vereinfachung der Integrale erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned}\partial_t Z_\pi &= -\phi_0^2 \lim_{Q^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial Q^2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \widehat{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{(U_k'')^2}{G_{B1}(q)G_{B2}(q+Q)} \\ &\quad - 2^{d/2-1} N_c \bar{h}^2 \lim_{Q^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial Q^2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \widehat{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{1}{G_F(q)G_F(q-Q)} \\ &\quad \left\{ Z_\psi^2 (1+r_F(q))(1+r_F(q-Q))q(q-Q) + \frac{1}{4} \bar{h}^2 \phi_0^2 \right\}\end{aligned}\tag{B.9}$$

Nach Taylorexansion der Funktionen G_B , G_F und r_F bis zur Ordnung Q^2 und anschliessender Ausführung der Ableitung erhalten wir die in Anhang A angegebenen Schwellenfunktionen. Bei diesen Rechnungen helfen die Formeln am Ende von Anhang C. Die Winkelintegrationen lassen sich ausführen, was den Faktor

$$v_d^{-1} \equiv 2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2)\tag{B.10}$$

ergibt, der vielfach in den Flussgleichungen auftritt.

Wir wollen noch eine Bemerkung zu den anderen Flussgleichungen machen. Bei der Herleitung der Gleichungen für \bar{h} und Z_ψ treten Ableitungen nach Grassmann-wertigen Variablen auf, die in dieser Arbeit durchgängig als Linksableitungen definiert sind. Bei der Differentiation der Matrizen nach diesen Variablen muss man darauf achten, ob man kommutierende oder antikommutierende Unterblöcke differenziert, was im gegebenen Fall einen Vorzeichenwechsel bewirkt. Der Verlauf der Rechnung ist ansonsten analog.

C Konventionen und nützliche Formeln

In diesem Abschnitt sind einige nützliche Formeln sowie wichtige Konventionen, die in dieser Arbeit immer wieder auftauchen, gesammelt. Besonders bei den Berechnungen der Flussgleichungen ist diese Sammlung von Nutzen.

C.1 Fouriertransformation und funktionale Ableitung

Wir definieren die Fouriertransformation wie folgt:

$$\phi(x) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{-iqx} \tilde{\phi}(q) \quad (\text{C.1})$$

$$\tilde{\phi}(q) = \int d^d x e^{iqx} \phi(x) \quad (\text{C.2})$$

und die funktionalen Ableitungen im Orts- und Impulsraum lauten bei uns

$$\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)} = \delta(x - y) \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\delta\tilde{\phi}(q)}{\delta\tilde{\phi}(q')} = (2\pi)^d \delta(q - q') =: \delta(q, q') \quad (\text{C.4})$$

Typische Ableitungen, die in Rechnungen im Rahmen des Formalismus der exakten Renormierungsgruppe immer wieder auftreten, sind zum Beispiel

$$\frac{\delta\phi(x)}{\delta\tilde{\phi}(q)} = e^{-iqx} \quad (\text{C.5})$$

C.2 d -dimensionale γ -Matrizen

Da in den praktischen Rechnungen bei den fermionischen Beiträgen zu den Flussgleichungen γ -Matrizen auftreten, wollen wir hier die wichtigsten Regeln zusammenstellen (vgl. auch [18]).

Die euklidischen γ -Matrizen in d Dimensionen gehorchen folgender Antikommutationsregel:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} 1_\gamma \quad (\text{C.6})$$

und das Analogon zu γ_5 im Euklidischen ist

$$\bar{\gamma} = i^{-d/2} \gamma_1 \dots \gamma_d \quad (\text{C.7})$$

und erfüllt

$$\{\gamma^\mu, \bar{\gamma}\} = 0 \quad (\text{C.8})$$

Folgende Spurformeln sind wichtig

$$\text{tr}(1_\gamma) = 2^{d/2} \quad (\text{C.9})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \delta^{\mu\nu} \text{tr}(1_\gamma) \quad (\text{C.10})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \bar{\gamma}) = 0 \quad (\text{C.11})$$

$$\text{tr}(\bar{\gamma}) = 0 \quad (\text{C.12})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu) = 0 \quad (\text{C.13})$$

Aus den Spurformeln folgen diese Formeln, die insbesondere bei der Taylorentwicklung und der anschliessenden Integration, wie in Anhang B erläutert, wichtig sind:

$$\bullet \quad \bar{\gamma}^2 = 1_\gamma, \quad \gamma^\mu \gamma_\mu = 1_\gamma \quad (\text{C.14})$$

$$\bullet \quad \not{q}^2 = q^2 1_\gamma, \quad \text{tr}(\not{q} \not{Q}) = qQ \text{tr}(1_\gamma) \quad (\text{C.15})$$

C.3 Integrale

Bei den Berechnungen der Flussgleichungen treten immer wieder Integrale von folgender Art auf, die wir deshalb an dieser Stelle angeben wollen. Wegen der Symmetrie $q \rightarrow -q$ gilt unter anderem:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} f(q^2) q^\mu &= 0 \\ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} f(q^2) q^\mu q^\nu &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} f(q^2) q^2 \frac{\delta^{\mu\nu}}{d} \\ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} f(q^2) q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} f(q^2) q^4 \frac{\delta^{\{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma\}}}{d(d+2)} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

wobei gilt $\delta^{\{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma\}} = \delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} + \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} + \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho}$. Wichtig ist auch die Integration über die d -dimensionale Einheitskugel, da viele der auftretenden Integrale wegen ihrer Rotations-symmetrie sofort über den Winkeln berechnet werden können:

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (\text{C.17})$$

D Software–Entwicklung

Ein Teil dieser Arbeit war es, die Entwicklung eines Software–Paketes zur Integration von Flussgleichungen voranzutreiben. Wie in der Einleitung erwähnt, ist dies nicht nur für diese Arbeit von Interesse. Der Inhalt des Paketes und der Stand der Entwicklung soll hier kurz festgehalten werden, um weitere Fortschritte zu erleichtern. Der Quellcode der Programme kann unter lamecker@thphys.uni–heidelberg.de angefordert werden. Für die Grundlagen numerischer Verfahren sei auf [19] verwiesen. Die Implementierungen beruhen zum großen Teil auf [20].

Die Code liegt in objektorientierter Form in C++ vor und setzt sich aus folgenden Hauptbestandteilen zusammen:

- **Schwellenfunktions–Bibliothek:**

Hier ist eine Klasse für die numerische Integration der Schwellenfunktionen implementiert. Der User muss die Integranden der Schwellenfunktionen definieren. Die Integration erfolgt nach einer adaptiven Romberg Methode. Für unsere Zwecke sind dort bereits nicht–triviale Ableitungen nach Argumenten δ und w der Schwellenfunktionen implementiert, die man zum Beispiel für die halb–implizite Bader–Deuffhard–Methode benötigt.

- **ODE–Integrator–Bibliothek:**

Sie besteht zur Zeit aus vier Verfahren zur Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit adaptiver Schrittweitenanpassung: ein Runge–Kutta–Cashkarp Verfahren 5. Ordnung, ein Runge–Kutta–Fehlberg Verfahren 5.Ordnung, ein Burlisch–Stoer Extrapolationsverfahren und eine halb–implizite Methode nach Bader und Deuffhard.

- **Numerik–Bibliothek:**

Hier sind numerische Hilfsfunktionen aller Art abgelegt. Die wichtigsten sind eine Funktion zur multidimensionalen Minimumssuche, polynomiale und rationale Interpolationsroutinen, eine least–squares–spline Routine für beliebig viele aneinandergesetzte Polynome, die an den Knotenpunkten beliebig viele stetige Ableitungen besitzen (sie wird in dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren verwendet) und Routinen zur Lösung von linearen Gleichungssystemen.

Alle Bibliotheken sind leicht in eigene Codes integrierbar und einfach für eigene Zwecke zu erweitern. Details können der Dokumentation entnommen werden.

Literatur

- [1] D. JUNGNICHEL, (1999), Habilitationsschrift.
- [2] T. KUNIHIRO, (1999), hep-ph/9905262.
- [3] C. WETTERICH, *Nucl. Phys.* **B352** (1991) 529.
- [4] C. WETTERICH, *Z. Phys.* **C57** (1993) 451.
- [5] C. WETTERICH, *Z. Phys.* **C60** (1993) 461.
- [6] C. WETTERICH, *Phys. Lett.* **B301** (1993) 90.
- [7] J. BERGES, N. TETRADIS, and C. WETTERICH, (2000), hep-ph/0005122.
- [8] C. WETTERICH, *Z. Phys.* **C48** (1990) 693.
- [9] S. BORNHOLDT and C. WETTERICH, *Z. Phys.* **C58** (1993) 585.
- [10] C. WETTERICH, *Z. Phys.* **C72** (1996) 139, (hep-ph/9604227).
- [11] U. ELLWANGER and C. WETTERICH, *Nucl. Phys.* **B423** (1994) 137.
- [12] U. ELLWANGER, *Z. Phys.* **C58** (1993) 619.
- [13] U. ELLWANGER, *Z. Phys.* **C62** (1994) 503, hep-ph/9308260.
- [14] D.-U. JUNGNICHEL and C. WETTERICH, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 5142, (hep-ph/9505267).
- [15] J. BERGES, D. U. JUNGNICHEL, and C. WETTERICH, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 034010.
- [16] C.CASO ET AL. (PARTICLE DATA GROUP), *Eur. Phys. J.* **C3** (1998) 1.
- [17] J. ADAMS ET AL., *Mod. Phys. Lett.* **A10** (1995) 2367.
- [18] J. ZINN-JUSTIN, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford University Press, 1993.
- [19] J. S. UND R. BULIRSCH, *Introduction to numerical analysis*, New York: Springer Verlag, 1980.
- [20] W. H. P. ET AL., *Numerical Recipes in C: the art of scientific computing*, Cambridge University Press, 1992.

DANKSAGUNG:

Ein großer Dank geht an Dirk Jungnickel, der mich inspiriert hat, diese Arbeit zu beginnen und sich viel Zeit genommen hat, mich in die Grundlagen dieses Projektes einzuweihen. Von ihm stammt das Gerüst des Codes für die Numerik.

Professor Wetterich gebührt besonderer Dank für die Betreuung dieser Arbeit, seine motivierende Art und Unterstützung in allen Phasen dieses Projektes.

Im Rahmen dieser Arbeit war ich als Gast bei Jürgen Berges am MIT in Cambridge, Massachusetts. Ich möchte ihm herzlich für seine Zeit und die ertragreichen Gespräche danken.

Ohne die vielen Diskussionen und eine extrem hilfsbereite Mannschaft am Institut für theoretische Physik hätte die Arbeit lange nicht soviel Spaß gemacht. Ich danke: Gero von Gersdorff, Markus Kindermann, Michael Doran, Tobias Baier, Eike Bick, Tim Gollisch, Claus Zahlten und Michael Frewer.

Wolfgang Bangerth danke ich für seine Hilfe bei Fragen der numerischen Stabilität.

Dank geht auch an meine Freunde, die mich auf verschiedenste Arten unterstützt haben.

Ohne meine Eltern wäre diese Arbeit niemals zustande gekommen.

ERKLÄRUNG:

Ich versichere hiermit, diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Hans Lamecker, Heidelberg, den 6. Januar 2004.